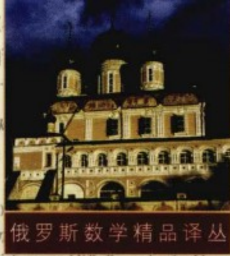


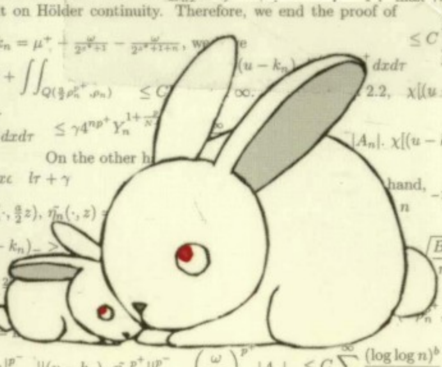
俄罗斯数学精品译丛

斐波那契数列

FIBONACCI SEQUENCE

● 瓦罗别耶夫 著

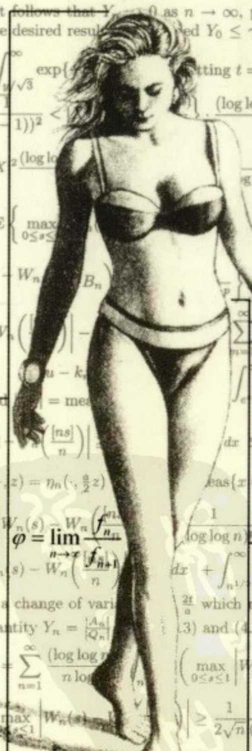
● 周春荔 译



$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} \quad 0.618$$



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



图片来源《坐拥书城》

刘培杰数学工作室

策划编辑 刘培杰

甄淼淼

责任编辑 杨冰皓

唐 蕾

翟新烨

封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号
邮 编：150006
联系电话：0451-86281378 13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

上架建议：趣味数学

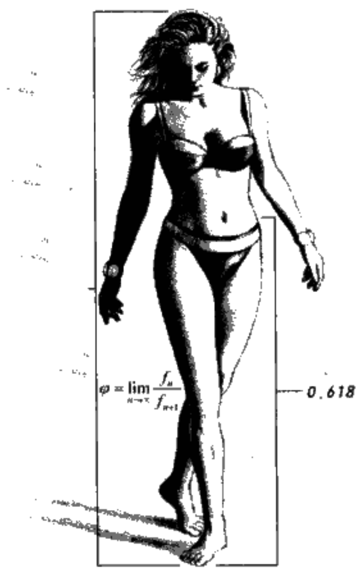
ISBN 978-7-5603-2979-6

定价 28.00 元

斐波那契数列

FIBONACCI SEQUENCE

瓦罗别耶夫 著
周春荔 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

斐波那契数列的理论是初等数学中困难而有趣的问题，它与"高深数学"的历史、问题和方法有紧密的联系.从有名的兔子问题开始几乎经历了八百年久远的岁月.迄今为止，斐波那契数列仍然是初等数学中最吸引人的一章.和斐波那契数列有关的问题在许多数学普及读物中都会出现，在学校的数学小组中常作为教材，在数学奥林匹克中也常被提及.

这本书包含的问题是列宁格勒国立大学 1949～1950 学年学生数学小组的某些学习材料.根据小组参加者的愿望，偏重于研究数论方面的内容；在本书中对于这些问题作了比较详尽的阐述.

在书中论及整除理论和连分数理论，阅读这些内容，不需要超出中学课程范围的预备知识.

本书适用于大学、中学师生.

图书在版编目(CIP)数据
斐波那契数列/(苏)瓦罗别耶夫著；周春荔译.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.11
ISBN 978－7－5603－2979－6
Ⅰ.①斐…　Ⅱ.①瓦… ②周…　Ⅲ.①斐波那契序列
Ⅳ.①O156
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 232623 号

书名：Числа Фибоначчи
作者：при посредничестве Н.Н.Воробьёв
©Н.Н.Воробьёв
Исключительное авторское право Произведения перевода на китайский язык приобретено издательством Харбинский политехнический университет припосредничестве Китайского агентства по авторским правам и Российского аторского общества."
本作品中文专有出版权由中华版权代理中心和俄罗斯著作权协会代理取得，由哈尔滨工业大学出版社独家出版.
版权登记号　黑版贸审字　08－2009－083
版权所有　侵权必究
策划编辑　刘培杰　甄淼淼
责任编辑　杨冰皓　唐　蕾　翟新烨
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8.5　字数 158 千字
版　　次　2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
印　　数　1～3 000 册
定　　价　28.00 元
(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

⊙第一版前言

在初等数学中存在许多困难而有趣的问题.这些问题没有被冠以任何名称,就其特点而言,宁可看做是一类"民间数学".这类问题散见于广为流传的普及读物或者单纯供消遣的数学文献中.人们常常很难确定某一个问题首先出现在哪一本书中.

这些问题时常以不同的形式流传着,有时好几个问题合成为一个比较复杂的问题,有时反过来,一个问题分解为好几个比较简单的问题.总之,常常难以说明,在什么地方一个问题结束而在什么地方另一个问题又开始了.人们总能正确地认为:每个这样的问题都会涉及一些粗浅的数学理论,这些数学理论的历史、问题和方法都与"高深数学"的历史、问题和方法有着紧密的联系.

斐波那契数的理论就是这样的理论.从有名的兔子问题开始几乎经历了七百五十年*久远的岁月.迄今为止,斐波那契数仍然是初等数学中最吸引人的一章.和斐波那契数有关的问题在许多数学普及读物中都会出现,在学校的数学小组中常作为教材,在数学奥林匹克中也常被提及.

这本小册子包含的问题是列宁格勒国立大学 1949 ~ 1950 学年学生数学小组的某些学习材料.根据小组参加者的愿望,偏重于研究数论方面的内容;在本小册子中对于这些问题作了比较详尽的阐述.

---

* 从 1202 年算起到现在已经八百多年了.——译者注

在本小册子中论及整除理论和连分数理论，阅读这些内容，不需要超出中学课程范围的预备知识.

对循环序列有兴趣的读者，可以参看A·H·马库雪维奇所写的篇幅不多但内容丰富的小册子——《循环序列》.同样，对数论方面的知识感兴趣的读者，可以参考这一学科的比较高深的著作.

H·H·瓦罗别耶夫

第四版前言

这本小册子第一版写作于20世纪50年代初，自那时以来情况有了许多变化.

首先，这是主要的，数学普及读物的主要读者范围——对数学感兴趣的高年级学生以及他们的老师们——大家的数学水平发生了变化.由于专门化的数学学校或物理－数学学校及班级网络的建立，学生实际上已经扩大了相应的学习领域的数学视野，现在能够很快引起他们兴趣的不只是好玩的初等问题，而已经是足够深刻和复杂的结果.

其次，是当代数学历史的基本事实.数学研究的目的与重心有了实质性的改变.特别是数论失去了自己控制的阵地.所有极值问题的比重明显上升，对策论已成为独立的数学分科，计算数学实际上已经兴起，所有这些不能不说是数学科学普及书籍的内容.

再次，斐波那契数仍在某些数学问题中显示自己的魅力.其中首推希尔伯特第十问题的Ю·В·马蒂亚雪维奇解，以及还不那么深刻的但是很有名的，大概是由Дж·吉菲洛母首先作出的单峰函数极值的搜索理论.

最后，确立了数量众多的斐波那契数的性质，这些性质显然是过去不知道的.从而产生了复兴研究斐波那契数的兴趣.这种推广高尚的“斐波那契主义”的癖好与不同国度的一些数学家有着不少联系.1963年在美国出版的杂志《斐波那契季刊》(The Fibonacci Quarterly)，可能是对此最令人确信的一种证据.

上面指出的一切事实，确定了本书内容由初版到再版这种形式的变化，现在把这些变化告诉给读者．第二版时添加了“关于求单峰函数极值的斐波那契方案”一节，与此同时提出一般化的数学和计算的问题．在第三版中扩展了数论的内容，其中§2的材料介绍了对解决希尔伯特第十问题有益的信息．最后，在现在的版本中将§3和§4的内容“提高”到一般化水平．在§3引进了用收敛分数逼近实数精确度的剩余类理论，以及斐波那契数在这些问题上的作用，在§4连同“拣石子”游戏的分析在内，对策论的研究，它们都是借助于自然数的斐波那契表示完成了周详的讨论．

要阅读本书，不需要读者具有超出中学课本以外的知识．对内容中较为困难之处我们用小号字排印，在阅读时省略不读这些内容不会影响对其余材料的理解．

H·H·瓦罗别耶夫

第六版前言

当前，正准备出版本书的德译本时，柏林德意志科学出版社(Deutscher Verlag der Wissenchaften)向我建议，在书中补充联系斐波那契数与信息论问题的材料．根据我在§1中的叙述，给出了在电子计算机中利用斐波那契记数系统，还有与它类似的“黄金”记数系统表示数原则和可能性，与此联系．O·H·瓦洛别耶娃为本书写了附录*，内容是讲述BASIC语言，并对根据书中内容描述的算法程序作了非常详细的注释．这些补充都是根据需要自然进行的，并趁本书俄语第六版的机会奉献给自己的读者．

此外，对H·H·费尔德曼教授表示诚挚的感谢，他指出以前各版本中在§3最后行文(关于用连分数逼近实数时，相邻斐波那契数之比极限的个别命题)逻辑上欠完善之处，我按他的建议进行了修正．我照例还要向那瑙玛·依里奇致谢，还是在1940～1941学年，他当时领导列宁格勒国立大学的学生数学小组，养成了我和同学们研究数论的习惯．

为了普及推广的时尚需要，我多少扩展了关于黄金分割的讨论．

最后，在本次版本中，对个别的修辞进行了改善．

H·H·瓦罗别耶夫
1989年

* 由于附录讲的是用BASIC语言进行计算的过程，所以略去了．

目录

引论 …………………………………………………… (1)
§1 斐波那契数的简单性质……………………… (5)
§2 斐波那契数的数论性质 …………………… (39)
§3 斐波那契数与连分数 ……………………… (63)
§4 斐波那契数与几何 ………………………… (89)
§5 斐波那契数与搜索理论…………………… (105)

引论

1.在古代的历史上有许多杰出的数学家.古代数学的许多成就,它们的发现者的高度智慧,迄今仍引起人们的赞颂.欧几里得、阿基米得、海伦的名字为每一个受过教育的人所知晓.

中世纪的数学处在例外的境况.除了韦达——然而他已经生活在16世纪,比较接近我们时代的任何一本中学数学教科书中,都没有提到中世纪数学家的名字,当然这绝非偶然.在这个时代数学的发展极为缓慢,卓越的数学家出现得很少.

一本叫做《算盘书》(Liber abacci)的著作引起我们很大的兴趣.这本书是著名的意大利数学家莱翁那多(Leonardo,生于比萨)所著.他的别名斐波那契(Fibonacci是filius Bonacci的缩写,也就是波那契之子)有很大的知名度.这本书写于公元1202年,流传到今的是公元1228年的一个手抄本.

《算盘书》是一部篇幅很大的著作.囊括了那个时期的几乎全部的算术和代数的知识.并且对后几个世纪西欧数学的发展有着显著的影响.特别地,正是由于这本书,使欧洲人知晓了印度(阿拉伯)数字.

介绍《算盘书》的资料,阐明若干个问题构成本书的主要部分.

我们考察在1228年那个手抄本的第123~124页的一个这样的问题:

"由一对家兔开始在一年中可以繁殖出多少对家兔?"

某人把一对家兔放在某处.四面用墙围起来,以便观察,由这一对兔子开始经过一年的繁殖,总计可以得到多少兔子.假设兔子的生殖力是这样的:每一对兔子每一个月可以生一对兔子,并且兔子在出生两个月以后就具有生殖后代的能力.在第一个月里第一对兔子生了一对后代.因此在第一个月兔子的总数是两对;在这两对中,只有一对能够在下一个月里生一对兔子,所以在第二个月里一共得到3对兔子;其中两对可以在下个月里进行生殖,所以在第三个月里有两对兔子出生,在这个月里兔子数目增加到5对;其中3对在下个月可以产生后代,所以在第四个月里有8对兔子;其中5对可以在第五个月里生殖5对后代,再加上上月的8对一共是13对兔子;其中5对尚不能在下月生殖,但剩下的8对可以生殖,所以在第六个月一共得到21对兔子;再加上第七个月里出生的13对,第七个月一共得到34对兔子;再加上第八个月里出生的21对,第八个月总计得到55对兔子;加上第九个月出生的34对兔子,第九个月总计得到89对兔子;加上第十个月出生的55对兔子,第十个月总计得到144对兔子;再加上第十一个月出生的89对兔子,第十一个月总计得到233对兔子;再加上第十二个月出生的144对兔子,第十二个月总计得到377对兔子.这就是从一对兔子开始,经过一年的繁殖所得到的兔子的总对数.其实,在这里你能看出,我们是怎样做的:也就是用第一个数同第二个数相加,即1和2相加;第二个加上第三个;第三个加上第四个;第四个加上第五个;然后一个加上后面一个,几乎不复杂地第十个同第十一个相加,也就是144同233相加;我们得到前面提到的兔子的总对数,即377;按这个程序可以无限地继续下去.

兔子的对数
1
第一个月
2
第二个月
3
第三个月
5
第四个月
8
第五个月
13
第六个月
21
第七个月
34
第八个月
55
第九个月
89
第十个月
144
第十一个月
233
第十二个月
377

2.现在我们由兔子转到数量上,并且考察下列的数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \tag{1}$$

其中每一项都等于前面两项之和,也就是,对所有的 $n > 2$,有

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{2}$$

在数学中经常遇到这样的数列,它每一项定义为前面若干项的某个函数.这样的数列称为递归数列,或者按俄罗斯的习惯叫循环数列.确定这个数列元素的数列的过程本身,叫做递归过程,等式(2)叫做循环(递归)方程.循环数列的一般理论基础,读者可以在已经提到过的A·И·马库雪维奇的书中找到(见第一版前言).

首先注意,仅只由一个条件(2)不能计算出数列(1)的各项.我们可以随便

地举出许多数列的不同的项.都满足条件(2),例如

$$2,5,7,12,19,31,50,\cdots$$

$$1,3,4,7,11,18,29,\cdots$$

$$-1,-5,-6,-11,-17,\cdots$$

等等.

这就是说,为了唯一地求出数列(1),条件(2)显然是不够的.我们必须指出某些补充条件.例如,可以给出数列(1)的前面几项.究竟应当给出数列(1)的前面多少项,才能只利用条件(2),就能够将数列(1)所有后面的项计算出来呢?

因为至少(1)中并非每一项都有前面两项,所以,并非数列(1)的所有项都能借助公式(2)得到,例如,数列第一项前面总不存在任何一个项,而它的第二项前面只有一个项.这就是说,为了确定数列(1),与条件(2)一起尚须知道数列开始的两项是必要的.

显然,为了使计算数列(1)的任意项成为可能,上述这些条件已经足够了.事实上,u_3可以作为我们给了的u_1与u_2之和算出来,u_4作为u_2与前面已经计算出的u_3之和;u_5作为已经计算出的u_3与u_4之和;照此类推,依次至无穷的项数.这样一来,由数列相邻两项对它紧随其后一项的推演,就可以到达任何预先给定角标的项,并且算出它来.

3.现在我们转到序列(1)的一个重要的特殊情况,此时$u_1=1,u_2=1$.正如上面指出的,由条件(2)就可以算出这个数列中所有各项,不难检验,在这个情况下数列的前14项是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377$$

这些数正是在前述的兔子问题中遇到过的,为了对问题创作者表示敬意,当$u_1=u_2=1$时的数列(1),称为斐波那契数列,它的每一项叫做斐波那契数.

斐波那契数有一系列有趣且重要的性质.考察这些性质是本书的全部任务.

§1 斐波那契数的简单性质

1. 首先我们计算前 n 个斐波那契数的和，也就是证明

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1 \tag{1.1}$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2 \\ u_2 &= u_4 - u_3 \\ u_3 &= u_5 - u_4 \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

将所有这些等式逐项相加，我们得到

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

我们再想到 $u_2 = 1$，即得所证.

2. 带有奇数角标的斐波那契数之和是

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} \tag{1.2}$$

为了证明这个等式，我们写出

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_5 &= u_6 - u_4 \\ &\vdots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

我们将这些等式逐项相加，就得到所要证明的结果.

$f_1 = f_2 = 1 \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

3. 带有偶角标的斐波那契数之和是

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \tag{1.3}$$

根据第 1 款，我们有

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

由这个等式逐项减去等式(1.2)，得到

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

这就是所要证明的.

进一步，由(1.2) 逐项减去(1.3)，得到

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \tag{1.4}$$

现在我们对(1.4) 的两边加上 u_{2n+1} 得

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \tag{1.5}$$

合并(1.4) 和(1.5)，得到正负相间的斐波那契数的和

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1 \tag{1.6}$$

4. 公式(1.1) 和(1.2) 是对一系列明显的等式相加所得. 还有一个例子是，应用这个方法可以导出前 n 个斐波那契数平方和的公式

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \tag{1.7}$$

为此，我们注意

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1}u_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

将等式

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1 u_2 \\ u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\ &\vdots \\ u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n \end{aligned}$$

逐项相加，就得到公式(1.7).

5. 斐波那契数之间的许多关系式借助完全归纳法证明是很方便的.

完全归纳法(通常叫这个方法为数学归纳法) 的实质在于，为了证明某个论断对所有自然数的正确性，只需证明：

(1) 对数 1 论断成立.

(2) 由所证论断对某个任意选取的自然数 n 的正确性，推出论断对于数 $n+1$ 的正确性.

对任意自然数正确的论断全部的归纳证明，就是由这两部分构成的.

在第一部分(通常比较简单) 建立所证论断对于 1 的正确性. 所证论断对于 1 的正确性有时叫做归纳基础. 在证明的第二部分(通常，更加复杂) 做的是，对

某个任意(但固定)的数 n 所证论断正确性的假设,由这个假设——它经常被叫做归纳假设,推出所证论断对数 $n+1$ 成立.证明的第二部分称为归纳"推演".

完全归纳法的详细叙述以及应用这个方法的各种变式的诸多例子,可以在И·С·索明斯基写的《数学归纳法》这本小册子中找到.特别地,不止一次地应用完全归纳法的进一步的变式,对 $n=1$ 和 $n=2$ 的论断证明构成归纳基础,并且归纳推演是"由 n 和 $n+1$ 到 $n+2$".

有时应用归纳法证明,可以叫做"由小于 n 的所有数到 n"的推演.这时失去了专门证明归纳基础的必要性.因为形式地说,证明 $n=1$ 的情况是由"所有"小于1的正整数(它简单到没有这样的数)到1的推演.下面对任意自然数分解质因数可能性的证明就是这样的例子.

我们假设,每个小于某个 n 的数能分解为质因数的乘积,如果数 n 是质数,则它本身就是自己的分解式.如果数 n 是合数,那么根据归纳假设它分别为至少两个因数的乘积.$n=n_1n_2$,其中 $n_1\neq 1$ 且 $n_2\neq 1$,但当 $n_1<n$ 且 $n_2<n$ 时,根据归纳假设,无论 n_1 还是 n_2 都可分解为质因数的乘积.这也就是说,n 可分解质因数.

在 §2 第36款定理证明和 §4 第16款作图中,有归纳法证明更加复杂的变式.

6. 运用归纳思想对斐波那契数的最简单现实的应用,是斐波那契数的定义本身.正如在引论中指出的,它在于指出斐波那契数前两个数 $u_1=1$ 和 $u_2=1$,给出递归关系式

$$u_n+u_{n+1}=u_{n+2}$$

由 u_n 和 u_{n+1} 向 u_{n+2} 的归纳推演.

特别地,由此自动得出,如果某个数列从两个1开始,而后面每一个数由它前面两个数相加得出来,那么这个数列就是斐波那契数列.

作为例子我们考察一道被称为"猴子跳跃的问题",它是这样叙述的:

小猴子可以在一个方向上被分成方格的区域中跳跃.每次跳跃要么跳到相邻的格子中,要么就跳过这相邻的格子,落在隔过一个方格的格子中,问小猴子移动 $n-1$ 个方格,而由第一个方格跳到第 n 个方格共有多少种方法?(在它们跳的过程中无论选哪一个格子作第一格,跳到它后面的第 n 个格子方法数都是一样的)

用 x_n 表示所求的数.显然 $x_1=1$(因为由第一个格跳到第一格只有一种方法——没有跳),且 $x_2=1$(由第一格转移到第二格也是一种方法:小猴一次直接跳到相邻的格子中),设小猴子的目的是跳到第 $n+2$ 个方格,实现这个目的的方法总数我们通过 x_{n+2} 表示.但从一开始这些方法就分做两类:从第二个格开始跳的方法数以及从第三格开始跳的方法数.由第二格转移到第 $n+2$ 格有 x_{n+1} 种方法,而由第三格转移到第 $n+2$ 格有 x_n 种方法.因此,数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 满足递归关系

$$x_n+x_{n+1}=x_{n+2}$$

 $f_1=f_2=1\quad f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$

因此同斐波那契数列相一致：$x_n = u_n$.

7.我们用归纳法证明下面的重要公式

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \tag{1.8}$$

证明这个公式我们将对 m 进行归纳.当 $m = 1$ 时，这个公式成为 $u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$ 的形式，显然成立.当 $m = 2$ 时，公式(1.8)也是对的，因为

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n =$$

$$u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n$$

这样一来，我们完成了归纳基础的证明，下面我们进行归纳推演：假设公式(1.8)当 $m = k$ 时和当 $m = k + 1$ 时都是正确的，证明当 $m = k + 2$ 时它也是正确的.

于是设

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$$

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

这两个等式逐项相加后，得到

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

这就是要证明的.

公式(1.8)用猴子跳跃问题中的术语很容易解释(甚至是证明).

也就是小猴子由第一格转移到第 $n + m$ 格的方法总数等于 u_{n+m}.这些方法中不只有小猴子跳过第 n 个格子的转移，还有小猴子跳到第 n 格子访问的转移.

在第一种方法，小猴子必定达到第 $n - 1$ 个方格(它能够有 u_{n-1} 种方法做到这一点)然后跳到第 $n + 1$ 个方格，最后移动剩下的$(n + m) - (n + 1) = m - 1$ 个格(存在 u_m 种方法).因此，第一类总计有 $u_m u_{n-1}$ 种方法.类似地，在第二类方法中小猴子达到第 n 格(这可以有 u_n 种方法)，此后移动到第 $n + m$ 格(由 u_{m+1} 种方法之一).因此第二类总计有 $u_n u_{m+1}$ 种方法.公式(1.8)获证.

8.公式(1.8)中令 $m = n$，得到

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

或者

$$u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \tag{1.9}$$

由所写的等式看出，u_{2n} 能被 u_n 整除.在下节中我们将证明大量的更为一般的论断.

因为

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

公式(1.9)能够改写为

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1})$$

或者

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

也就是说,角码数相差为 2 的两个斐波那契数的平方差仍是个(角码为偶数的)斐波那契数.

类似地(令 $m = 2n$) 可以证明

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^2 - u_{n-1}^3$$

9. 进一步我们得到下面这个非常有用的公式

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1} \tag{1.10}$$

我们通过对 n 归纳来证明它. 当 $n = 2$ 时,(1.10) 形式为

$$u_2^2 = u_1u_3 - 1$$

显然成立的.

现在假设对某个 n 已证明了公式(1.10),对它的两边加上 u_nu_{n+1},得到

$$u_n^2 + u_nu_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + u_nu_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

或者

$$u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}$$

或者

$$u_nu_{n+2} = u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

或者

$$u_{n+1}^2 = u_nu_{n+2} + (-1)^{n+2}$$

根据这个归纳推演,公式(1.10) 对任意的 n 得到了证明.

10. 用类似方法可以确立斐波那契数这样的性质

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$$

$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \cdots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$$

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_u = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2$$

请读者完成这些公式的证明.

11. 美妙得不次于斐波那契数的是被称做二项式系数的另一类数. 它是幂 $(1+x)^n$ 的展开式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n \tag{1.11}$$

中 x 方幂前面的系数. 显然,数 C_n^k 对所有非负整数 n 和所有不超过 n 的非负整数 k 是唯一确定的.

利用二项式系数可以使许多数学讨论非常方便. 它们也适用于我们研究斐波那契数的性质. 此外,二项式系数与斐波那契数有着直接的联系. 下面我们揭示这个联系的某些规律性.

预先，我们建立二项式系数的某些性质.

在公式(1.11)中，令 $n=1$，立刻看到

$$C_1^0=C_1^1=1$$

此外，成立下面的引理.

引理 $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$

证明 我们有恒等式

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)$$

利用二项式系数的定义有

$$C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+\cdots+C_{n+1}^{k+1}x^{k+1}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}=$$
$$(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^kx^k+C_n^{k+1}x^{k+1}+\cdots+C_n^nx^n)(1+x)=$$
$$C_n^0+(C_n^0+C_n^1)x+\cdots+(C_n^k+C_n^{k+1})x^{k+1}+\cdots+$$
$$(C_n^{n-1}+C_n^n)x_n+C_n^nx^{n+1}$$

但这个等式左边和右边是同一个多项式，所以 x 同次幂的系数对应相等. 即应当有

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$$

这就是要证明的.

由所证的引理得出，二项式系数可以借助某种递归过程来计算，这些得到斐波那契数的某些更复杂性质的过程很相似. 这种情况，为我们用归纳法证明各种类型的有关二项式系数的论断提供了可能性.

12. 排列二项式系数为下表的形式，称为帕斯卡三角形：

$$\begin{array}{llllll}
C_0^0 & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^n & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

也就是

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

在B·A·乌斯片斯基的小册子《帕斯卡三角形》中包含有帕斯卡三角形及组成它的二项式系数的主要性质的详细叙述.

帕斯卡三角形的行通常自上而下地编号,并且由唯一的一个1组成的最上面的一行认为是第0行.

由上述可以得出,帕斯卡三角形每一行边缘的项等于1,而表中剩下的每一项用直接位于它上面的两个另外的项相加的方法可以得出.

13. 公式(1.11)让我们立刻得出同组成帕斯卡三角形一行的二项式系数相联系的两个重要的关系式.

公式(1.11)中 $x = 1$,得到

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

如果在公式(1.11)中令 $x = -1$,则有

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n$$

14. 我们通过对 n 归纳来证明

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot k} \tag{1.12}$$

这个公式经常被用做二项式系数的定义.它规定二项式系数 C_n^k 作为"由 n 个元素中取 k 个的组合数".这里我们找到了更加形式的途径,对已知情况来说是最好的.

如果认为,零个因子的乘积永远等于1,则当 $k = 0$ 时,由公式(1.12)得到已知的 $C_n^0 = 1$.据此,我们可以限制在 $k \geqslant 1$ 的情况.

当 $n = 1$ 时,有

$$C_1^1 = \frac{1}{1} = 1$$

现在设当某个给定的 n 公式(1.12)对 $k = 0,1,\cdots,n$ 的任意值都正确.

我们考察数 C_{n+1}^k,因为 $k \geqslant 1$,可以写为

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$

或者,利用归纳假设(1.12)

$$\begin{aligned}C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)} + \\ &\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)k} = \\ &\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)}\left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) = \\ &\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)}\cdot\frac{k+n-k+1}{k} = \\ &\frac{(n+1)n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)k} = C_{n+1}^k\end{aligned}$$

最后的等式是由帕斯卡三角形的第 $n+1$ 行得出的二项式系数的公式(1.12).

15.通过帕斯卡三角形的数引与它的行成45°角的直线,这些直线都叫做帕斯卡三角形的上升对角线.例如,通过数1,4,3或者1,5,6,1的直线,就是上升对角线.

我们证明,位于任一条上升对角线的数之和是斐波那契数.

实际上,第一条上升对角线是帕斯卡三角形最上面的一条,它只由1组成.第二条对角线也只由1组成.为了证明我们感兴趣的命题,只要证明组成帕斯卡三角形的第 n 条与第 $n+1$ 条上升对角线上各数之和,等于构成它的第 $n+2$ 条对角线的数之和就够了.

但位于第 n 条对角线上的数是

$$C_{n-1}^0, C_{n-2}^1, C_{n-3}^2, \cdots$$

而在第 $n+1$ 条对角线上的数是

$$C_n^0, C_{n-1}^1, C_{n-2}^2, \cdots$$

写出这些所有数的和,是

$$C_n^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2) + \cdots$$

或者,运用在第11款的引理,得

$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \cdots$$

最后的表达式正是在帕斯卡三角形第 $n+2$ 条上升对角线上所有数的和.

由刚刚得到的这个结果再根据公式(1.1)我们立刻得出,不在帕斯卡三角形第 n 条上升对角线下方的所有二项式系数之和等于 $u_{n+2}-1$.

利用(1.2),(1.3),(1.4)以及与它们类似的公式,读者不难得出联系斐波那契数与二项式系数的进一步的恒等式.

16.迄今为止我们是用递归方式,也就是按角码来归纳确定斐波那契数.然而,可以证明,任意一个斐波那契数都能够定义为它的角码数的某个函数.

为此目的,研究满足关系式

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \tag{1.13}$$

的不同的序列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$.

所有这样的序列我们称做方程(1.13)的解.

我们用字母 V, V' 和 V'' 分别表示序列

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

$$v'_1, v'_2, v'_3, \cdots$$

$$v''_1, v''_2, v''_3, \cdots$$

首先证明两个简单的引理.

引理1 如果 V 是方程(1.13)的解,c 是任一个数,则序列 cV(也就是序列 $cv_1, cv_2, cv_3, \cdots$)也是方程(1.13)的解.

证明 将关系式

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$$

逐项乘以 c,我们得到

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$$

这就是所需要的结果.

引理 2 如果序列 V' 和 V'' 都是方程(1.13)的解,则它们的和 $V' + V''$(也就是序列 $v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \cdots$)也是方程(1.13)的解.

证明 由引理的条件,有

$$v'_n = v'_{n-2} + v'_{n-1}$$

和

$$v''_n = v''_{n-2} + v''_{n-1}$$

这两个等式逐项相加,得到

$$v'_n + v''_n = (v'_{n-2} + v''_{n-2}) + (v'_{n-1} + v''_{n-1})$$

这个引理获证.

现在设 V' 和 V'' 是方程(1.13)的不成比例的两个解(即方程(1.13)两个这样的解,对任意常数 c,存在角码 n,使得 $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$).我们证明,方程(1.13)的任意一个解 V 能够表示为如下形式

$$c_1 V' + c_2 V'' \tag{1.14}$$

其中 c_1 与 c_2 是适当的常数.因此,通常说,(1.14)是方程(1.13)的通解.

我们先来证明,如果方程(1.13)的解 V' 和 V'' 不成比例,则

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \tag{1.15}$$

(也就是这个不成比例已在数列 V' 和 V'' 的前两项产生了).

证明 用反证法证明(1.15).

假设方程式(1.13)的两个不成比例的解 V' 和 V'' 有

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2} \tag{1.16}$$

由合比定理,得到

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

注意到 V' 和 V'' 是方程(1.13)的解,则

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

类似地确信(归纳!)得到

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \cdots = \frac{v'_n}{v''_n} = \cdots$$

这样一来,由(1.16)就推得,序列 V' 和V'' 成比例,而这与假设矛盾,这意味着式(1.15) 是正确的.

现在取某个数列 V,它是方程(1.13) 的解.正如在引论第 2 款已经阐明的,如果给定它的前两项 v_1 和 v_2,这个序列就完全确定了.

我们求这样的 c_1 和 c_2,使得下列等式成立

$$\begin{aligned} c_1v'_1 + c_2v''_1 &= v_1 \\ c_1v'_2 + c_2v''_2 &= v_2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

那么根据引理 1 和引理 2, $c_1V' + c_2V''$ 给出的正是数列 V.

鉴于条件(1.15),方程组(1.17) 无论怎样的数 v_1 和 v_2,关于 c_1 和 c_2 有解

$$c_1 = \frac{v_1v''_2 - v_2v''_1}{v'_1v''_2 - v''_1v'_2}, c_2 = \frac{v'_1v_2 - v'_2v_1}{v'_1v''_2 - v''_1v'_2}$$

(条件(1.15) 表明这两个分数的分母不为 0.) 将所计算的 c_1 和 c_2 的值代人(1.14),得到所要求的序列 V 的表达式.

这就是说,为了写出方程(1.13) 所有的解,我们只需求出它的某两个不成比例的解就足够了.

我们现在寻求在几何级数中的这些解.为适合引理 1,限制考察首项等于 1 的这样的序列就足够了.于是取级数

$$1, q, q^2, \cdots$$

为使它是方程(1.13) 的解,必须对所有的 n,有

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

或者,约去 q^{n-2},得

$$1 + q = q^2 \tag{1.18}$$

这个二次方程的两个根,即$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$是所求的公比.将它们分别用 α 和 β 来表示.着重指出,数 α 和β 作为方程(1.18) 的两个根,应当有 $1 + \alpha = \alpha^2$, $1 + \beta = \beta^2$ 并且 $\alpha\beta = -1$.

因此,我们得到两个几何级数,它们都是方程(1.13) 的解,所以形如

$$c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \cdots \tag{1.19}$$

的所有数列都是方程(1.13) 的解.因为我们求得的两个几何级数具有不同的公比(也就是 α 和β),所以这两个几何级数不成比例.公式(1.19) 中当取不同的 c_1 和 c_2 时可以给出方程(1.13) 的所有的解.

特别地,对某些 c_1 和 c_2,公式(1.19) 能够给出斐波那契数列.为此,正如上面所指出的,必须由方程

$$c_1 + c_2 = u_1$$

及

$$c_1\alpha + c_2\beta = u_2$$

也就是由方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

来确定 c_1 和 c_2.

解这个方程组,得到

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

由此

$$u_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

也就是

$$u_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{1.20}$$

公式(1.20) 叫做比内公式(根据首先给出这个公式的数学家来命名的).

显然,对(1.13) 的另外的解可以求出与此相类似的公式.请读者试对引论中第 2 款的数列导出类似的公式.

17.我们看到了 $\alpha^2 = \alpha + 1$,所以很清楚,数 α 的任何正整数幂可以确定表示为 $a\alpha + b$ 的形式,其中 a, b 是整系数.于是

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1$$

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = 3\alpha + 2$$

等等.

我们证明(根据归纳法)

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}$$

其实,我们看到,对 $n = 2,3$,这是对的.

假设

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1}$$

$$\alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k$$

这两个等式相加,得出

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\alpha + (u_{k-1} + u_k)$$

或者

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1}$$

归纳推演成立.

类似地，由 $\beta^2 = \beta + 1$ 可推得

$$\beta^n = u_n\beta + u_{n-1}$$

18. 借助比内公式可以方便地计算与斐波那契数相关的各种和数.

例如，求

$$u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$$

等于什么值.

我们有

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^3 - \beta^3 - \beta^6 - \cdots - \beta^{3n})$$

或者将我们遇到的几何级数求和

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right)$$

但是

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha$$

以及类似的 $\beta^3 - 1 = 2\beta$，所以

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta}\right)$$

或者，进行化简

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2 - \beta^{3n+2} + \beta^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$$

19. 作为下面的例子，我们应用比内公式计算前 n 个斐波那契数的立方和.

首先注意

$$u_k^3 = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$\frac{1}{5}(u_{3k} - (-1)^k 3u_k) = \frac{1}{5}(u_{3k} + (-1)^{k+1}3u_k)$$

所以

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{1}{5}((u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}) +$$

$$3(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n))$$

进一步利用公式(1.6)与前一款的结果,有

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1}3u_{n-1} + 3\right) = \frac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1}6u_{n-1} + 5}{10}$$

20. 当随着角标增加时斐波那契数增大的多么快?提出这样的问题是适宜的.比内公式对这个问题给我们足够详尽的回答.

不难证明下面的定理.

定理 斐波那契数 u_n 是最接近$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$的整数,即$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$是首项为$\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$公比等于 α 的几何级数的第 n 项 a_n.

证明 显然,只要证明 u_n 和 a_n 之差的绝对值总是小于$\frac{1}{2}$就够了.但

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

因为 $\beta = -0.618\cdots$,那么 $|\beta| < 1$,这就是说,对任意的 n 都有 $|\beta|^n < 1$.进一步(因为$\sqrt{5} > 2$)应当有$\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.定理获证.

了解极限理论的读者,可以很容易地将这个定理的证明变形为

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0$$

利用所证的定理,在借助对数表的情况下可以计算斐波那契数.

例如,我们计算 u_{14}(容易想象,u_{14} 应当是关于兔子的斐波那契问题的答案)

$$\sqrt{5} = 2.236\,1, \quad \lg\sqrt{5} = 0.349\,49$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\,0, \quad \lg\alpha = 0.208\,98$$

$$\lg\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \times 0.208\,98 - 0.349\,49 = 2.576\,2$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376.9$$

最接近 376.9 的整数是 377,这也就是 u_{14}.

当计算大角标的斐波那契数时,已经不能按对数表确定所有的数字,而只能指出它的前某几个数字,因而这样的计算是近似的.

作为练习,读者可以证明,在十进制中,计算 u_n,当 $n \geqslant 17$ 时 u_n 的数字位数不多于$\frac{n}{4}$不少于$\frac{n}{5}$.问 u_{1000} 是一个多少位的数?

21. 上一款的结果可以作得精细一些. 下面的定理是为后面作准备的.

定理

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\alpha^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}$$

证明 只限于证明不等式的左边;右边类似可证.

因为根据比内公式,有

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

而且 $\alpha\beta = -1$. 为此,只需证明

$$\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqslant \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}$$

或者

$$\alpha^{2n-\frac{1}{n}} \leqslant \alpha^{2n} - 1$$

或者 n 次方

$$\alpha^{2n^2-1} \leqslant (\alpha^{2n} - 1)^n \tag{1.21}$$

我们将根据归纳法证明这个不等式,当 $n = 1$ 时它变为

$$\alpha \leqslant \alpha^2 - 1$$

实际是成立的(也就是取等号). 当 $n = 2$ 时(1.21) 意味着

$$\alpha^7 \leqslant (\alpha^4 - 1)^2 \tag{1.22}$$

这个不等式可以用直接计算来检验,然而利用在 17 款引入的关系式能够证明它,在已知情况下我们有

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 11$$

并且改写(1.22) 为

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \leqslant 15\alpha + 10$$

这是显然的. 最后,当 $n = 3$ 时(1.21) 改写为

$$\alpha^{17} \leqslant (\alpha^6 - 1)^3$$

类似于前面的验证.

现在设,当 $n > 2$ 时(1.21) 成立,证明

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \leqslant (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}$$

为此只需证明,当 n 增加 1 时(1.21) 的右部比左部增长的快就够了. 但左部显然增长 α^{4n+2} 倍,下面估计右边的增长.

我们有

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{2n} - 1)^n} = (\alpha^{2(n+1)} - 1)\left(\frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1}\right)^n$$

后一个分数比 α^2 大,同时

$$\frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1} - \alpha^2 = \frac{\alpha^{2n+2} - 1 - \alpha^{2n+2} + \alpha^2}{\alpha^{2n} - 1} =$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}=\frac{\alpha}{\alpha^{2n}-1}>\frac{\alpha}{\alpha^{2n}}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}$$

因此,利用比内公式(见 11 款的例)得到

$$\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n>\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n=\alpha^{2n}+n\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}}+\cdots$$

省略号的位置是正的加项.

据此,当 $n>2$ 时所写的表达式大于 $\alpha^{2n}+1$.这意味着

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)}-1)^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n}>(\alpha^{2(n+1)}-1)(\alpha^{2n}+1)=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1=$$
$$\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}(\alpha^2-1)-1=$$
$$\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1>\alpha^{4n+2}$$

定理获证.

22.我们再考察一类以斐波那契数为基础的数列,设 x 是任意数.计算和数

$$S_n(x)=u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n$$

为此首先利用比内公式,有

$$S_n(x)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt5}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt5}x^2+\cdots+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt5}x^n=$$
$$\frac{1}{\sqrt5}(\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots+\alpha^nx^n)-$$
$$\frac{1}{\sqrt5}(\beta x+\beta^2x^2+\cdots+\beta^nx^n)\tag{1.23}$$

这里在括号中写着两个几何级数的和,它们的公比分别为 αx 和 βx.在这种公比不为 1 的情况下,几何级数和的表达式有已知公式.如果公比等于 1,则级数所有项彼此相等.计算它们的和是非常简单的.

首先考虑当 $\alpha x\neq1$ 和 $\beta x\neq1$,即当 $x\neq\frac{1}{\alpha}=-\beta$ 和 $x\neq\frac{1}{\beta}=-\alpha$ 的情况.在这种情况下,求在(1.23)中几何级数的和,得到

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x}{\alpha x-1}-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x}{\beta x-1}$$

或者,完成自然的变换

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{(\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x)(\beta x-1)-(\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x)(\alpha x-1)}{(\alpha x-1)(\beta x-1)}$$

进一步

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2}-\alpha^{n+1}x^{n+1}+\alpha x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}-\frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2}-\beta^{n+1}x^{n+1}+\beta x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}\right)$$

借助 $\alpha\beta=-1,\alpha+\beta=1$,而 $\alpha-\beta=\sqrt5$,于是有

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{x\sqrt5-(\alpha^n-\beta^n)x^{n+2}-(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})x^{n+1}}{1-x-x^2}$$

最后

$$S_n(x)=\frac{x-u_nx^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2} \tag{1.24}$$

特别地,在这个公式中设 $x=1$,得出

$$S_n(1)=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1-u_n-u_{n+1}}{-1}=u_{n+2}-1$$

与在第 1 款证明的结果是一致的.

当 $x=-1$ 时,有

$$S_n(-1)=u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n=$$
$$\frac{-1-u_n(-1)^{n+2}-u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1}=$$
$$(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$$

(见(1.6)).

现在考察剩下的"特殊"情况.

设 $x=\frac{1}{\alpha}=-\beta$,则在(1.23)中第一个级数的每一项等于1,这个级数的和等于 n.在第二个级数中公比等于 $-\beta^2$.

这样一来

$$S_n(\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\sqrt{5}}(n-(\beta^2-\beta^4+\cdots+(-1)^{n-1}\beta^{2n}))=$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2-(-1)^n\beta^{2n+2}}{1+\beta^2}\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)$$

注意

$$1+\beta^2=2+\beta=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

而

$$\frac{\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{1+\beta}{2+\beta}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}=\frac{10-2\sqrt{5}}{20}$$

最后得到

$$S_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{10}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\sqrt{5}-1}{10} \tag{1.25}$$

最后,设 $x=\frac{1}{\beta}$.在这种情况下,在(1.23)中第二个级数的公比等于1,第一个级数的公比等于 $-\alpha^2$.于是有

$$S_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha^2 - \alpha^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha^{2n}) - n)$$

与前面类似，可得

$$S_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^2 - (-1)^n\alpha^{2n+2}}{1+\alpha^2} - n\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} - n\right)$$

结果

$$S_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = (-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{10}\alpha^{2n} + \frac{1+\sqrt{5}}{10} - \frac{n}{\sqrt{5}} \tag{1.26}$$

23. 我们考察，当固定 x 且使 n 无限增大时，和数 $S_n(x)$ 本身怎样变化.

在等式(1.23) 中对 n 取极限，得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}((\alpha x + \alpha^2x^2 + \cdots + \alpha^nx^n) -$$

$$(\beta x + \beta^2x^2 + \cdots + \beta^nx^n)) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(\alpha x + \alpha^2x^2 + \cdots + \alpha^nx^n) -$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(\beta x + \beta^2x^2 + \cdots + \beta^nx^n)$$

这里在两个极限符号后面都是几何级数之和，所以极限本身是对应的无穷几何级数的和. 但正如已知，对此为了能够说无穷几何级数的和必须且只需它们的公比的绝对值小于1. 在我们的级数中公比等于 αx 和βx. 这里 $|\alpha| > |\beta|$. 所以由 $|\alpha x| < 1$ 推得 $|\beta x| < 1$. 因此，不等式 $|\alpha x| < 1$ 成立将保证在给定的时刻所有我们感兴趣的极限都存在.

于是，如果 $|x| < \frac{1}{\alpha}$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \tag{1.27}$$

存在. 我们通过 $S(x)$ 表示这个极限，为了计算它可以利用公式(1.24).

为此注意，根据第 20 款证明的结果

$$u_n \leqslant \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_nx^{n+2} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1\right)x^{n+2} =$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(\alpha x)^n + \lim_{n\to\infty} x^{n+2}$$

鉴于 $|\alpha x|<1$ 应当有 $|x|<1$，这样两个所求的极限等于0.根据同样的理由

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 0$$

因此，在公式(1.24)中当 n 无限增加时对 n 取极限，得到

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2} =$$

$$\frac{1}{1-x-x^2}(x - \lim_{n\to\infty} u_n x^{n+2} - \lim_{n\to\infty} u_{n+1}x^{n+1}) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

求得的结果可以改写为展开式的形式，有如

$$u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{1.28}$$

给变量 x 以不同的值，我们将得出不同的具体公式.例如，设 $x=\frac{1}{2}$，我们发现

$$\frac{u_1}{2} + \frac{u^2}{2^2} + \cdots + \frac{u^n}{2^n} + \cdots = 2$$

24.公式(1.28)还可以借助某些另外的讨论得出来.

我们写出

$$u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots = S(x) \tag{1.29}$$

(注意在这里表达式 $S(x)$ 仅当 $|x|<\frac{1}{\alpha}$ 时才有意义).这个等式逐项乘以 x 和 x^2

$$u_1 x^2 + u_2 x^3 + \cdots + u_n x^{n+1} + \cdots = xS(x) \tag{1.30}$$

$$u_1 x^3 + u_2 x^4 + \cdots + u_n x^{n+2} + \cdots = x^2 S(x) \tag{1.31}$$

由等式(1.29)减去(1.30)和(1.31)两个等式，合并同类项得到

$$u_1 x + (u_2 - u_1)x^2 + (u_3 - u_2 - u_1)x^3 +$$
$$(u_4 - u_3 - u_2)x^4 + \cdots + (u_n - u_{n-1} - u_{n-2})x^n + \cdots =$$
$$(1 - x - x^2)S(x)$$

最后，等式左边括号中的表达式，除第一个外，显然都等于0.这个等式变为

$$x = (1 - x - x^2)S(x)$$

由此推得(1.28).

25.如果某个有限或者无穷的数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

组成几何级数，则这些数的倒数数列

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}, \cdots$$

也是几何数列，所以这两个数列可以综合为同一个公式.当然，这里必须成立，

这两个级数的公比是互为倒数,并且在无穷级数的情况下,它们之中可以不多于一个收敛.也就是说,它的公比(的绝对值)小于1.

带有斐波那契数的位置本质上呈现出另外的事情.它们的序列不是级数,而是两个级数的和(在第16款的意义下),因此数列

$$\frac{1}{u_1},\frac{1}{u_2},\cdots,\frac{1}{u_n},\cdots$$

具有非常复杂的结构.我们提出计算和

$$S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

的问题并且本质上是计算无穷和

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} + \cdots \tag{1.32}$$

按通常惯例这个问题是这样解的:首先求作为前 n 项和的表达式,然后借助这样或另外的法则与方法证明,当项数无限增加时这个和的极限存在且实现计算这个极限"趋向"的界限.于是得到收敛的几何级数的已知公式.同样我们在第22款和第23款已经做过了.

然而在我们下面考察的情况中,进行这样的讨论不会成功:对于和 S_n 与加项数 n 的关系的任何一般表达式还不知道,在精确地求 S_n 的必要性的情况下没有看出(在第一个观点下,在任意的情况)另外的道路,正如"笨拙地"计算一个加项,然后是另一个,且将所得的数相加.此时所有时间仍停留在开放的问题,到和的极限 S 还远吗?

同时为了在大的 n 值的情况下近似地(且以任意的精确度)求和 S_n,可以进行相反次序的讨论:确信极限和 S 有意义,可以试图求它.然后取这个所求和的 S 值作为当比较大的 n 值时的 S_n 的值.在这种情况下得到的误差,当 n 越大时就会越小.

遗憾的是,实现这个纲领很复杂,对于极限和的精确值的任何表达式也不知道(只是近来清楚了,这个数是无理数),我们把它的计算作为独立的问题进行研究.

26.首先确定 S 值的存在性.也就是证明位于(1.32)右边的无穷级数是收敛的.

为此目的,我们写出两个显然的不等式

$$1 < \alpha - \beta$$
$$\alpha < \alpha^2 - \beta^2$$

并且将两个这样的不等式顺次相加(与从前不止一次做过的类似)得到一般的不等式

$$\alpha^{n-1} < \alpha^n - \beta^n$$

所以

$$\frac{1}{u_n}=\frac{\sqrt{5}}{\alpha^n-\beta^n}<\frac{\sqrt{5}}{\alpha^{n-1}}$$

因此，所有这样的不等式由第1个到第 n 个逐项相加，得到

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}<\sqrt{5}\left(\frac{1}{\alpha^0}+\frac{1}{\alpha^1}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)$$

或者，对右边的几何级数求和

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}<\sqrt{5}\,\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{\alpha-1}<6$$

这意味着，所有和 S_n 是有界的：它们的每一个都不超过数6. 但同时这些和的每一个都是对前面和数添加某个正的加项的方法得到的，因此每个后面的和严格地大于前面的和

$$S_1<S_2<\cdots<S_n<S_{n+1}<\cdots$$

由此得出，和的序列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \tag{1.33}$$

有极限. 我们通过 S 来表示它.

关于单调递增有界的实数列存在极限的论断属于数学分析基础理论之列，所以这里进行推导它，即使不是详细的证明，至少也是按照Π·Л·切比雪夫的“不可争辩性严格证明”的表达的近似的讨论.

于是，设我们研究有界递增数列(1.33). 把整个实数集分为两类，它们中所有这样的数作为“上类”，它不小于序列(1.33)中任一个数. 而所有其余的数作为“下类”. 这样产生的分划叫做“截割”. 由实数集合显然的(或严格说来，是充分似真的)完备性性质(它也叫这个集合的连续性)，存在有限实数不比下类中任何数小，也不比上类中任何数大. 我们用 S 表示这个数并且证明，它就是所求的极限.

实际上，我们取任意小的 $\varepsilon>0$，数 $S-\varepsilon$ 属于截割的下类. 因此，找到数 S_N 超过 $S-\varepsilon$. 进一步 S_N 后面的所有数 S_n 都超过 $S-\varepsilon$：$S-\varepsilon\leqslant S_n$；另一方面数 $S+\varepsilon$ 属于上类，所以 $S_n\leqslant S+\varepsilon$. 这样一来，对任何 $\varepsilon>0$，从某个 n 开始，将有

$$S-\varepsilon\leqslant S_n\leqslant S+\varepsilon$$

但根据极限的定义，这意味着

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

27. 我们计算数列(1.33)的极限 S.

为此，写

$$\frac{1}{u_n}=\frac{u_{n+1}u_{n+2}}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}=\frac{u_nu_{n+1}+u_{n+1}^2}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}$$

或者,引证在第 9 款中的证明

$$\frac{1}{u_n}=\frac{u_nu_{n+1}+u_nu_{n+2}+(-1)^n}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}=\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}+\frac{(-1)^n}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}$$

由 1 开始对所有的 n 求和,有

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots=\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\cdots+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{1}{u_5}+\cdots-\left(\frac{1}{u_1u_2u_3}-\frac{1}{u_2u_3u_4}+\frac{1}{u_3u_4u_5}-\cdots\right)$$

其中左边是和数,用 S 表示;右边第一行也是这个和数但没有$\frac{1}{u_1}$,即没有 1;第二行是 S 但已经少了两项$\frac{1}{u_1}$ 和$\frac{1}{u_2}$,即没有 2;第三行的和用 $S^{(3)}$ 表示.因此,最后的等式改写为 $S=2S-3-S^{(3)}$,由此推得

$$S=3+S^{(3)} \tag{1.34}$$

我们将和 S 的计算问题归结为计算和 $S^{(3)}$.这最后的问题可以解,同时根据两点理由认定这种方法更为有效.第一个,在和 $S^{(3)}$ 中的加项当它的角标增大时比和 S 减小得快(对充分大的 n,在 $S^{(3)}$ 中每后面一项,通常以 $\alpha^3\approx4.36$ 倍地小于前边的项).第二,有可能还是更重要的,和 $S^{(3)}$ 是交错的,也就是部分和轮流交替地比 S 大,再比 S 小.特别地,每个这差的部分和与极限和 S 的差,按绝对值来说比第一个被抛掉的项要小.

于是,例如,在和 $S^{(3)}$ 中计算前四项,有

$$S\approx3+\frac{1}{u_1u_2u_3}-\frac{1}{u_2u_3u_4}+\frac{1}{u_3u_4u_5}-\frac{1}{u_4u_5u_6}=$$

$$3+\frac{1}{1\cdot1\cdot2}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{1}{3\cdot5\cdot8}=3.358$$

同时误差比$\frac{1}{5\cdot8\cdot13}=\frac{1}{520}\approx0.002$ 要小.

28.斐波那契数的巧妙变换还能够加速求更为精确的极限和 S 的过程.于是,引入考察"同号(!)和"

$$S^{(5)}=\frac{1}{u_1u_2u_3u_4u_5}+\frac{1}{u_2u_3u_4u_5u_6}+\frac{1}{u_3u_4u_5u_6u_7}+\cdots$$

能够得到等式

$$S^{(5)}=\frac{5}{12}-\frac{3}{2}S^{(3)}$$

由此,鉴于(1.34)

$$S=\frac{41}{12}-\frac{3}{2}S^{(5)}$$

而和 $S^{(5)}$ 比 $S^{(3)}$ 收敛得还要快.

可以再考察类似的"交错(!)和"$S^{(7)}$,得到

$$S=\frac{11\ 749}{5\ 280}-\frac{60}{11}S^{(7)}$$

等等.

自然,所得这一系列公式中每一个的推导越来越需要灵活机敏的证明.

29.对近似计算极限和 S 可以不用《组合 —— 斐波那契数》,而是根据直接利用比内公式的进一步分析的另外的方法去求.在这种时候能够得到更一般问题的解,也就是关于级数和

$$S(x)=\frac{x}{u_1}+\frac{x^2}{u_2}+\cdots+\frac{x^n}{u_n}+\cdots$$

的近似计算.(在这种情况下,当然要在设定这个和是存在的条件下进行讨论)

进一步使用将级数的每一项$\frac{x^n}{u_n}$ 分为两个部分的方法,其中一部分脱出作为主部,为的是精确地(当然,作为公式形式)求解,而第二部分带有修正第一部分的特征,虽然对于精确求和不方便,然而它的项同它的角标一起很快地减小,因而为了达到解答需要的精度,对这样的数目不多的一些项的修正取和就足够了.这个方法经常在计算数学的不同领域中使用.

30.利用我们的方法写出

$$\frac{x^n}{u_n}=\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n-\beta^n}=\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}+\left(\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n-\beta^n}-\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)=$$

$$\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}+\frac{x^n\sqrt{5}\beta^n}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^n}$$

进一步借助 $\alpha\beta=-1$,有

$$\frac{x^n}{u^n}=\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}+(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^{2n}} \tag{1.35}$$

根据对斐波那契数的比内公式将这个公式化为下列形式

$$\frac{x^n}{u_n}=\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}+(-1)^n\frac{x^n}{u_n\alpha^{2n}}$$

因此,有

$$S(x)=\frac{x\sqrt{5}}{\alpha}+\frac{x^2\sqrt{5}}{\alpha^2}+\cdots+\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^n}+\cdots-$$

$$\frac{x}{1\cdot\alpha^2}+\frac{x^2}{1\cdot\alpha^4}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{u_n\alpha^{2n}}+\cdots \tag{1.36}$$

这里在第一行右边是被加项的主部,它由公比为$\frac{x}{\alpha}$ 的几何级数组成.当 $|x|<\alpha$ 时,这个级数收敛;进一步我们将假设,遵守这个不等式.在这种情况

下级数的和等于

$$\frac{x\sqrt{5}}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-x/\alpha}=\frac{x\sqrt{5}}{\alpha-x} \tag{1.37}$$

在(1.36)的第二行表示和自身的一系列修正项.它们的项除符号外与原来级数对应项的差别是还添加了与 n 的增加一起增加十分快的因子 $u_n\alpha^n$ 在分母中.这意味着,这个级数是收敛的.

31.根据所述对于和 $S(x)$ 的近似计算使我们在级数和公式(1.36)中替代右边的第一行为(1.37)中的表达式,存留第二行所需数目的修正项.在此时按照计算的设想可以方便地提供利用第17款指出的对每个 n 替换幂 α^{2n} 为和 $u_{2n}\alpha+u_{2n-1}$.

这样一来

$$S(x)=\frac{x\sqrt{5}}{\alpha-x}-\frac{x}{\alpha+1}+\frac{x^2}{3\alpha+2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{u_n(u_{2n}\alpha+u_{2n-1})}+\cdots$$

特别地,我们对 $x=1$ 的情况,保留4个修正项,得到

$$S(1)=S\approx\frac{\sqrt{5}}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{3\alpha+2}-\frac{1}{2(8\alpha+5)}+\frac{1}{3(21\alpha+13)}$$

或者进行计算,$S\approx 3.361\ 1$,同时误差不超过第一个舍弃的项,等于 $\frac{1}{5(55\alpha+34)}=0.001\ 6$.

这个解答与第27款末尾的答数的差别可以这样解释,级数保留的最后一项是负的,所以所得答数是不足近似值;这里最后保留的一项是正的,所得答数是过剩近似值.

32.正如在22~28款描述的极限 S 的计算,这里也可以进一步运用收敛更快的方法.

为此,我们在形式地写出(1.34)的右边的修正项中,分出自己的"主要部分"和剩下"第二次修正"

$$(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^{2n}}=(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^{3n}}+\left[(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^{2n}}-(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}}{\alpha^{3n}}\right] \tag{1.38}$$

这里在括号中的表达式可以变换为下面的形式:

$$(-1)^n\frac{x^n\sqrt{5}\alpha^n-x^n\sqrt{5}(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^{3n}}=$$

$$(-1)^n \frac{x^n\sqrt{5}\beta^n}{(\alpha^n-\beta^n)\alpha^{3n}} = \frac{x^n}{u_n\alpha^{4n}}$$

误差的主要部分(在(1.38)右边的第一个加项)构成首项为 $-\frac{x\sqrt{5}}{\alpha^3}$,公比为 $-\frac{x}{\alpha^3}$ 的无穷几何级数,所以它的和等于

$$-\frac{x\sqrt{5}}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{\alpha^3}} = -\frac{x\sqrt{5}}{\alpha^3+x}$$

并且将 $S(x)$ 的表达式变形为

$$S(x) = \frac{x\sqrt{5}}{\alpha-x} - \frac{x\sqrt{5}}{\alpha^3+x} + \frac{x}{u_1\alpha^4} + \frac{x^2}{u_2\alpha^8} + \cdots + \frac{x^n}{u_n\alpha^{4n}} + \cdots$$

33. 应用类似的方法再次改善级数的收敛性,可以将它变形为

$$S(x) = \frac{x\sqrt{5}}{\alpha-x} - \frac{x\sqrt{5}}{\alpha^3+x} + \frac{x\sqrt{5}}{\alpha^5-x} - \frac{x}{u_1\alpha^6} + \frac{x^2}{u_2\alpha^{12}} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{u_n\alpha^{6n}} + \cdots$$

进一步顺次地分出对修正项的修正主部给出作无论多么快地收敛于和 $S(x)$ 的级数的可能性.

34. 说到斐波那契数 u_n,暂时假设所有时间里它的角标 n 是正整数. 但是根据定义斐波那契数的递归关系,可以写为

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1} \tag{1.39}$$

此时它是从大的角标数到小的角标数的斐波那契数的表达式.

在(1.39)中顺序设 $n = 2,1,0,-1,\cdots$,我们能够计算

$$u_0 = 0, u_{-1} = 1, u_{-2} = -1, u_{-3} = 2, \cdots$$

一般的容易确信(设读者本身确信!)

$$u_{-n} = (-1)^{n+1}u_n \tag{1.40}$$

这个带有任意整数指标的斐波那契数简单的表达式,能将关于这样的斐波那契数的所有问题归结为通常的带有自然数角标的斐波那契数的问题.

例如,为了计算"负指标的"前 n 个斐波那契数的和

$$u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-n}$$

根据关系式(1.40)改写它为

$$u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n$$

就足够了. 利用公式(1.6)

$$u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-n} = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1 = -u_{-n+1} + 1$$

依靠根据递归关系关于斐波那契数的由"n 和 $n+1$ 到 $n+2$"型的归纳论

证,能够联系(1.39)的关系式化归为"由 n 和 $n-1$ 到 $n-2$"的模式.特别地,这样一来对任意整数 n 和 m 的重要公式(1.8)证明就没有困难了

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$$

35.根据关于数 α 和 β 的方程

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n + \alpha^{n+1}$$
$$\beta^{n+2} = \beta^n + \beta^{n+1}$$

不只对正整数而且对任意整数值 n 都是正确的(对于分数值 n 这个等式也在已知意义下仍然有效,但在这里就不展开介绍了).由此,容易得出比内公式

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

对任意整数 n 都成立.

我们注意,在第17款结果的结论可以(按"向后"归纳)转移到角码为负值的情况

$$\alpha^{-n} = u_{-n}\alpha + u_{-n-1} \tag{1.41}$$

这个等式改写为

$$(-1)^n\beta^n = (-1)^n u_n \frac{1}{\beta} + (-1)^n u_{n+1}$$

即

$$\beta^{n+1} = u_{n+1}\beta + u_n$$

除此以外,(1.41)可以表为

$$\alpha^{-n} = (-1)^{n-1}u_n\alpha + (-1)^n u_{n+1}$$

即

$$(-1)^n\alpha^{-1} = u_{n+1} - u_n\alpha$$

或者,换言之

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = (-1)^n\alpha^{-n} \cdot \frac{1}{u_n} \tag{1.42}$$

36.斐波那契数可以组成独特的"斐波那契数记数系统"的基数.即表示任意自然数 α 为某个"数码"序列 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_\gamma$ 的形式.这个序列可由下面的方式(归纳法的!)得到.

由给定的 $a = a_0$ 中减去不超过它的最大的斐波那契数 u_n,写数码 $\varphi_1 = 1$ 和差 $a_1 = a_0 - u_n$,这是作法的第一步.

假设,k 步构作已经完成,由此呈现数码序列

$$\varphi_1\cdots\varphi_k \tag{1.43}$$

由0和1组成,它也是某个数 a_k.那么第$(k+1)$步的作法由下面组成:比较数 a_k 同斐波那契数 u_{n-k},如果出现 $a_k < u_{n-k}$,则对序列(1.43)添写 $\varphi_{k+1} = 0$,规定

数 $a_{k+1}=a_k$.而如果有 $a_k \geqslant a_{n-k}$,则对(1.43)添写 $\varphi_{k+1}=1$ 且认为 $a_{k+1}=a_k-u_{n-k}$.我们完成这个过程的$(n-1)$步,显然,由于对序列(1.43)的第$(n-1)$项进行,数 $a_{n-1}=0$.

事实上写的过程是由数 a 顺次分出加项,它等于最大可能的斐波那契数,也就是表示 a 为不同的斐波那契数之和.

最终对应数 a 的序列(1.43)称做它的斐波那契表示法,且通过 $\Phi(a)$ 表示.组成 $\Phi(a)$ 的 0 和 1 叫做数 a 的斐波那契码.很清楚,如果

$$\Phi(a)=\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}$$

那么

$$a=u_n\varphi_1+u_{n-1}\varphi_2+\cdots+u_2\varphi_{n-1} \tag{1.44}$$

我们用例子来解释说明.设 $a=19$,那么

$$u_n=13(n=7),\varphi_1=1,a_1=19-13=6$$

$$u_6=8>a_1,\varphi_2=0,a_2=a_1=6$$

$$u_5=5\leqslant a_2,\varphi_3=1,a_3=6-5=1$$

$$u_4=3>a_3,\varphi_4=0,a_4=a_3=1$$

$$u_3=2>a_4,\varphi_5=0,a_5=a_4=1$$

$$u_2=1\leqslant a_5,\varphi_6=0,a_6=1-1=0$$

因此,$\Phi(19)=101\,001$,且 $19=u_7+u_5+u_2$.

显然,每个数 a 有唯一的斐波那契表示 $\Phi(a)$,然而不是所有从 1 开始由 0 与 1 组成的序列必定是某个数 a 的斐波那契表示$\Phi(a)$.例如 $\Phi(a)$ 不能有相邻两个 1.

实际上,设 $\Phi(a)$ 中的某个零后面遇到相邻的两个 1,$\varphi_k=0,\varphi_{k+1}=\varphi_{k+2}=1$.这意味着

$$a_{k-1}<u_{n-k+1} \tag{1.45}$$

$$a_{k-1}=a_k,a_k-u_{u-k}=a_{k+1},a_{k+1}\geqslant u_{n-k-1}$$

但把第二行的所有关系式逐项相加,有

$$a_{k-1}\geqslant u_{n-k}+u_{n-k-1}=u_{n-k+1}$$

这与(1.45)矛盾.

这就是说,如果在 $\Phi(a)$ 中能遇到两个相邻的码 1,那么它们前面的码必全不为 0,即 $\varphi_1=\varphi_2=1$.但这时按照定义 $a_1=a_0-u_n\geqslant u_{n-1}$,于是

$$a_0\geqslant u_n+u_{n-1}=u_{n+1}$$

这表明,u_n 不是不超过 a 的最大的斐波那契数.

所以我们限定没有相邻两个 1 已经足够了:由 $n-1$ 个 0 和 1 组成从 1 开始的不含有两个挨着的 1 的任何序列都是某个数 a 的斐波那契表示 $\Phi(a)$.对于

它

$$u_n \leqslant a < u_{n+1} \tag{1.46}$$

在此能够确信，例如可以利用在第 6 款关于小猴子跳格子问题的结果. 设有 $n-1$ 个格子，沿着它，小猴对它按已了解的方法跳跃(即跳到邻格或跳过格子). 小猴跳完全部格子之后，遍历了的格子记为 0，而其余的格子记为 1. 这样所有有可能的 u_{n-1} 是小猴子完成的方法，不同方法也用 u_{n-1} 标记. 如果对它们每个前面添写 1，那么我们得到的写法，它可以是满足(1.45) 的数 a 的斐波那契数值. 但这些数恰为 u_{n-1}，并且它们中每一个应当有自己的表示法，因此每个表示法尽管对应一个数.

37. 我们对自然数在斐波那契记数系统中表示问题的可能性有双重兴趣.

第一，利用斐波那契记数系统解题的兴起成为必然：在这些问题的回答中包含的数的必要特征，这些数通过斐波那契码的表达. 这样问题的例子是在 12 ~ 20 款讨论的.

第二，这显得更为重要. 斐波那契记数系统可以作为解决自然数问题的万能方法，交错的自然数问题已经利用的记数系统.

所以考察斐波那契记数系统的一般特点同另外的计数系统类似特点的比较是有意义的.

38. 我们首先发现同十进记数系统比较，斐波那契系统不适应许多世纪以来建立的习惯：它缺乏直观性，在这一关系中它完全没有竞争性. 这就是说，能够寻求利用斐波那契系统的有效范围，只在于那些直观的十进记数系统已经被挤出了的地方. 这个范围是数表示法获得所有重大的意义并且转化它们为电子计算机码(IBM 码). 然而这个领域已经被机器自己的记数系统所占领(也就是二进制记数系统)，在这个领域中斐波那契数系统同它进行着比赛.

我们比较二进制和斐波那契记数系统的优点和缺点. 这两个系统可以认为是有"同样的起点"；它们两个中起作用的是同样的"字符"，由两个数码 0 和 1 组成. 所以运用这两个记数系统在带有两个语词"是" 和"非" 的电子计算机内部语言中具有一般可能性，可以认为是一致的.

同时一系列更特别的是，不少的基本性质上，二进记数系统则优于斐波那契系统.

下面我们列举的这些是二进制记数系统的优越性.

39. 二进制记数系统比斐波那契记数系统有更大"容量". 在它们中 n 位二进制数刻画 2^n 个自然数(由 0 到 2^n-1)，那么在斐波那契记数系统中只有 u_n 个数(由 0 到 u_n-1). 例如，十位二进制数有 1 024 个，而十位斐波那契数只有 55 个. 所以当在电子计算机中利用斐波那契记数系统比利用二进记数系统需更大等级的内存.(粗略地说，为 $\frac{\lg 3}{\lg 2}=\frac{0.447\ 12}{0.301\ 03}$，即约一倍半长).

40. 但是，上款指出的斐波那契记数法的缺欠，同二进制记数法相比较与它们表示数的阶的增加相联系，形成一个重要的恒定的特点，与此联系的现象称为“抗干扰性”. 我们将在下面进行研究.

在二进制记数系统中任何数码序列是某个数的表示法，所以在这个写法中任何错误（错字、笔误）将变它为写法中的某个另外的数，并且这样的错误能够是不知不觉的. 在斐波那契系统中的数能对应的不是所有数码序列，而只是在其中没有两个相邻接的1排在一起的序列. 所以，如果由于某个与1排在一起的0替换为1的错误，那么这个错误的结果立即会被看到，错误可以被相应的监查系统记下并且能立即修正.

的确，在斐波那契数的表示法中另外可能的错误（替代10为一组0，或者替换1为0，或者最后整个一组挨着的数码被曲解）可以是不知不觉的，然而将暂时安于此状就是了.

在描述的事实中显示出一个非常普遍的控制论的规律性，其中包含剩余的信息（表现在所给的情况中阶的增加）增加它的抗干扰性.

41. 然而斐波那契记数系统同二进制系统比较还有一个读数法的缺欠. 在二进制中能任意精确地写出任意实数，指出在数的表示法中小数点的位置以及小数点后（即由小数点向右）应放置的数码. 斐波那契记数系统规定只是自然数的表示法. 当然，可以划分自然数1为某些相同的小部分并且在斐波那契记数系统中表示这些小部分. 但这显然将产生各种算术中的不方便. 如果试图找这个途径的话，读者发现它不会有困难.

42. 我们转向比较实行基本算术运算的可能性.

在二进制记数系统中比在斐波那契系统中完成加法运算的“小表”更为简单.

对二进制记数系统中两个数的加法像十进制系统中一样地进行. 形式地说，两个在二进制系统中给出的数的加法可以表示为二的单位的阶. 这样的添加每个单位阶的算法根据公式

$$0 + 2^n = 2^n, 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

它的运算由下面的例子中看到

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{r} \cdots 0 \\ +\quad 1 \\ \hline \cdots 1 \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{r} 101110 \\ +\quad 10 \\ \hline 110000 \end{array}$$

即对0添加阶的单位（在情况(a)）在对应的阶的数码变为1；添加阶的单位到数码1（情况(b)）改变由它直接向左的所有位置由1变为0，而它前面0的位置变

为 1.

在斐波那契记数法中两个数加法的算法实质上相似,尽管结构更加复杂.它根据公式

$$0 + u_n = u_n, \quad u_n + u_n = u_{n+1} + u_{n-2}$$

它的加法运算有两种状态.

第一,由于添加第 n 阶单位在和中,第 n 和第 $n+1$ 个位置可能发生单位码,它们在那里是不固定的,也就是在相邻位置上已经具有第一个加项的单位.克服这个读数法的不规范可以直接从右边两个数码 01 直到右边最近的一对零为止全变为一片 0,00 变为 01.这可以在例子中演示

(a)
$$\begin{array}{r} 100101010 \\ +\qquad\qquad 1 \\ \hline 101000000 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 1001010100 \\ +\qquad\qquad 1 \\ \hline 1010000001 \end{array}$$

第二,在和中第 $n-2$ 个位置呈现单位可以不仅是显示第一个加项,但同它"在一个位置"的单位数码的阶.实际上这意味着对第一个加项增加新的较小阶的加项,也就是 u_{n-2}.与此联系能够又产生对读数法进一步的破坏.它需要自己去克服.由指出的例子可以说明

(c)
$$\begin{array}{r} 100101010101000 \\ +\qquad\qquad 1 \\ \hline 101000001010010 \end{array}$$

这里除在较高阶变01→00外,在较小的阶直到第一次出现一组三个数码000为止,注意改变 01→10 而 000 变为 010.在数的右边结尾这个过程是自己消失的.因为 $u_1 = u_2$,所以

$$2u_1 = u_1 + u_2 = 2u_1 = u_3$$

这样一来,数的"小表"加法在斐波那契记数系统中,至少比二进制系统复杂.但它的运算是足够清楚的.

大概这两个记数系统之间对减法运算也有同样的关系.

43. 二进制记数系统的乘法运算"小表"比斐波那契系统原理要简单.事实上,在二进制记数系统中(其实正如在通常的十进制或所有其他"通常"的系统中一样)两个阶单位的乘积仍是阶单位.然而作为同阶单位的乘积在斐波那契系统中能够给出足够复杂的形式(例如,1000·1000 = 1000101).

44. 我们看到,斐波那契记数系统在所有已指出的方面输给了二进制系统.作为补偿只有一个抗干扰性.真的,在现代条件下这个补偿是到处存在的:在我

们的时代电子计算机工作有足够大的内存,利用它在每个数中的一倍半大的节不构成困难.高速运算的电子计算机能够克服加法运算的复杂性,同时抗干扰性无论多么局部和有限,它都起着重要作用.也就是说现在电子计算机快速运算,大量的完成它们的运算增加了产生错误的概率,至少在它们一个中提高了价值.它不惜牺牲任何监查计算的可能性.

因此,自然产生这样的意图,贯彻在实际的电子计算机设计和使用中使用斐波那契记数系统的记数表示法.此时容忍当完成加法运算时产生的不足轻重的不方便,并且寻求减少确实的真正的不方便的方法,无论是起源于乘法运算的复杂性,还是由于自然数类斐波那契记数法运用的局限性.显然的,斐波那契系统后面的两点不足可以同时被消去,稍微修改这个系统,至少修改某些外在的形式是不复杂的.

45.我们推广记数系统自身的概念和在这样的系统中数的表示法(下面的讨论对理解 36 款指出的内容是有力的).

设

$$G: g_0 = 1, g_1, g_2, \cdots \tag{1.47}$$

是无限增加的正实数序列(即不必设定是整数).这个序列称为 G - 记数系统的基数.

现在取任意的自然数 a 并且将使用数学归纳法.首先求这样的角码 n,使得

$$g_n \leqslant a < g_{n+1}$$

并且存在这样的自然数 γ_1,使得

$$g_n\gamma_1 \leqslant a < g_n(\gamma_1 + 1)$$

数 γ_1 称为数 a 的第一位数码,考察差

$$a_1 = a - g_n\gamma_1$$

我们认为完成了作法的第一步.

假设作法第 k 步已经完成.其结果表现为某个数码序列

$$\gamma_1, \cdots, \gamma_k \tag{1.48}$$

而也有某个数 a_k.在第 $k+1$ 步时将比较数 a_k 与序列(1.47)中的数 g_{n-k};如果在这时出现 $a_k < g_{n-k}$,则对序列(1.48)数码后面添写 $\gamma_{k+1} = 0$ 且设 $a_{k+1} = a_k$;如果也呈现 $a_k \geqslant g_{n-k}$,那么存在这样的自然数 γ_{k+1},使得

$$g_{n-k}\gamma_{k+1} \leqslant a_k < g_{n-k}(\gamma_{k+1} + 1) \tag{1.49}$$

在序列(1.48)数码后面添写 γ_{k+1} 并且设

$$a_{k+1} = a_k - g_{n-k}\gamma_{k+1}$$

这个手续完成 $n-1$ 步以后我们找到形如(1.48)的 $n-1$ 项的数码列,并且

$a_{n-1} = 0$.

最后数 a 对应的序列(1.48)我们称为在 G 记数系统中它的表示法.而这个序列的项叫做 a 的 G 码.

已经知道的记数系统是所写模式的特殊情况.如果序列 G 是几何数 1,10,100,1 000,…,那么 G 记数系统显然是十进制;如果 G 是级数 $1,2,2^2,2^3,2^4,\cdots$ 那么是二进制;如果 G 是斐波那契数的序列 —— 则是斐波那契记数系统.

着重指出,写出的程序完全不需要.为了组成 G 记数系统的基数,数(1.47)是整数或者至少是有理数.也可以是完全任意的正实数(当然要组成递增序列).但利用方便的系统的设想简化这样记数系统选取的可能性,对 G 记数系统提出上面的讨论是需要的.

46.(1) 在 G - 系统表示任意数的数码可以只用数码 0 和 1.同(1.49) 在一起,这意义是,对任意 n

$$1 < \frac{g_{n+1}}{g_n} \leqslant 2 \tag{1.50}$$

(2) 对在 G 记数系统中表示的数添加个别节的加项(即形如 g_n 的数) 的算法应当是足够简单的.

但最简单的可能性对应图式

$$g_n + g_n = g_{n+1} = 2g_n$$

此时 G 记数系统实际上成为二进制的;或者是图式

$$g_n + g_{n+1} = g_{n+2} \tag{1.51}$$

即节的单位应当满足方程(1.13),此时 G 记数系统呈现为斐波那契系统.

所有其余的递归图式得到 G 的另外的"阶" 的加项包含或者非单位系数(例如,图式 $2g_n + g_{n+1} = g_{n+2}$),或者大数量的加项(例如 $g_n + g_{n+1} + g_{n+2} = g_{n+3}$).它们导致在相应的记数系统中数的加法足够复杂的算法.此外,它们中许多破坏了条件(1.50),并且丧失了"二进" 记数系统的许多重要性质.

(3) 由(1.47) 任意两个阶的单位的乘积也应是阶的单位.

对二进制系统,$g_n = 2^n$,这是显然的.(因为($2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$)).

47.现在由(1.47) 中取序列 G,它的项适合递归关系(1.51),并且它的任意两项 g_n 和 g_m 的乘积仍是它的某一项 g_e.

但正如在 16 款指出的,为了序列 G 遵守关系式(1.51),必须(正如终究是充分的) 存在这样的 c_1 和 c_2,使得对每个 $n = 0,1,\cdots$,有

$$g_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n \tag{1.52}$$

(其中正如本书到处可见,α 和 β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个根).特别地,当 $n = 0$ 时

$$g_0 = 1 = c_1\alpha^0 + c_2\beta^0 = c_1 + c_2$$

这样我们可以假设 $c_1 = c, c_2 = 1 - c$,并且(1.52)获得形式

$$g_n = c\alpha^n + (1-c)\beta^n \tag{1.53}$$

同样对任意自然数 m,有

$$g_m = c\alpha^m + (1-c)\beta^m$$

现在假定正数 m 是固定的.根据乘积的条件 $g_n g_m$ 应当是某个 $g_{l(n)}$,其中 $l(n)$ 受到约束,这个数依赖于 n.于是有

$$g_n g_m = (c\alpha^n + (1-c)\beta^n)(c\alpha^m + (1-c)\beta^m) = \\ c\alpha^{l(n)} + (1-c)\beta^{l(n)} = g_{l(n)}$$

或者

$$c^2\alpha^{n+m} + c(1-c)(\alpha^n\beta^m + \beta^n\alpha^m) + (1-c)^2\beta^{n+m} = \\ c\alpha^{l(n)} + (1-c)\beta^{l(n)}$$

或者

$$\frac{c^2\alpha^{n+m} + c(1-c)(\alpha^n\beta^m + \beta^n\alpha^m) + (1-c)^2\beta^{n+m}}{c\alpha^{l(n)} + (1-c)\beta^{l(n)}} = 1$$

因为这个等式对任意自然数 n 是正确的,它由于 n 无限增加时"停于"某处,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^2\alpha^{n+m} + c(1-c)(\alpha^n\beta^m + \beta^n\alpha^m) + (1-c)^2\beta^{n+m}}{c\alpha^{l(n)} + (1-c)\beta^{l(n)}} = 1$$

但 $|\alpha| > 1$ 而 $|\beta| < 1$.所以在极限号下面分数的极限值中起作用的只是分子和分母的第一加项.我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^2\alpha^{n+m}}{c\alpha^{l(n)}} = 1$$

即

$$\lim_{n\to\infty} c\alpha^{n+m-l(n)} = 1$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{n+m-l(n)} = \frac{1}{c}$$

或者,最后取以 α 为底的对数

$$\lim_{n\to\infty}(n + m - l(n)) = \log_\alpha \frac{1}{c}$$

这里极限号下面仅取整数值,因此,极限值是整数.也就是,对充分大的 $n = N$,应当成立

$$N + m - l(N) = \log_\alpha \frac{1}{c}$$

进行反对数演算,我们得到 $c = \alpha^{-(N+m-l(N))}$,即数 c 应当是数α 的某个整数幂.设 $c = \alpha^k$.

剩下确定整数参数 k 的值.为此,在(1.53)中设 $n = 1$,并注意根据(1.50),应当有 $1 < g_1 \leqslant 2$,即

$$1 < \alpha^k \cdot \alpha + (1 - \alpha^k)\beta \leqslant 2$$

或者

$$1 < \alpha^k(\alpha - \beta) + \beta \leqslant 2$$

但 $|\alpha| > 1$ 而 $|\beta| < 1$.所以这里与 k 的关系表达式由 k 的增大而增大.我们发现,当 $k = 0$ 时,它变为 α 并且刚好位于需要的区间内;$k = 1$ 时它变为等于 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta$,已经大于2.因此,我们唯一可以接受的 k 值是0,这意味着 $c = 1$.并且公式(1.52)取形式

$$g_n = \alpha^n$$

这样一来,递归序列 G 在实际上呈现为首项是1的几何级数,级数的任意两项的乘积仍是它的满足序列 G 提出的要求的项.

应当保证表示任意实数带有任意随便多大精确度的可能性.

建构 G 记数系统演算的这个要求满足平凡的形式.在 G 记数法中实数从小数点向右能出现无论随便多少的数码(0和1),对应着"负的阶":$\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \cdots$

48.引入的讨论给出两条结论的根据.

第一,G 记数系统具有某些性质,有着对计算机化的应用给予方便.它阶的单位是

$$\cdots \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \cdots$$

第二,这个系统是我们根据简述的条件单值形式定义的.这意味着,它是满足这些条件的唯一系统.

找到系统的好的性质和它在这个意义上的独一无二,引起计算机设计者和这个事业理论家的注意.有时称它为"黄金的"记数系统.这也成为在 §4 第一款引入这个理论的动因.

§ 2 斐波那契数的数论性质

1. 现在我们考察斐波那契数的涉及整除性的某些性质.

定理 如果 n 被 m 整除,那么 u_n 也被 u_m 整除.

证明 设 n 被 m 整除,即 $n = mk$. 对 k 进行归纳法证明.

对 $k = 1, n = m$,在此种情况下 u_n 能被 u_m 整除是显然的. 现在假设 u_{mk} 能被 u_m 整除. 并且考察 $u_{m(k+1)}$. 但 $u_{m(k+1)} = u_{mk+m}$,根据(1.8)

$$u_{m(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}$$

所写等式右边第一加项,显然被 u_m 整除,第二加项也是 u_{mk} 的倍数,也就是根据归纳假设,也被 u_m 整除. 这意味着 u_m 整除这两个加项的和,即 u_m 整除 $u_{m(k+1)}$. 这就是本定理的证明.

2. 现在取某个数 m. 如果存在至少一个斐波那契数 u_n 被 m 整除. 那么能找到无穷多个斐波那契数也被 m 整除. 除了 u_n,它们例如可以是数 $u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, \cdots$.

因此很有趣地说明了,"对于给定的数 m,能否找到至少一个被它整除的斐波那契数",原来这是能够做到的.

设 $\overline{k}$ 表示由 k 除以 m 所得的余数. 写出由斐波那契数除以 m 的这样余数对子的序列

$$\langle \overline{u_1}, \overline{u_2} \rangle, \langle \overline{u_2}, \overline{u_3} \rangle, \langle \overline{u_3}, \overline{u_4} \rangle, \cdots, \langle \overline{u_n}, \overline{u_{n+1}} \rangle, \cdots \quad (2.1)$$

如果认为数对$\langle a_1,b_1\rangle$和$\langle a_2,b_2\rangle$当$a_1=a_2$且$b_1=b_2$时相等，那么除以m得出的所有不同数对的个数等于m^2. 因此，若在序列(2.1)中取前m^2+1项，那么这些项中必定出现一样的.

设$\langle\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}\rangle$是在序列(2.1)中重复出现的第一对，我们证明，这一数对是数对$\langle 1,1\rangle$. 其实，我们假设与此相反，也就是第一个重复的数对是数对$\langle\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}\rangle$，其中$k>1$. 在(2.1)中找到数对$\langle\overline{u}_l,\overline{u}_{l+1}\rangle(l>k)$，等于数对$\langle\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}\rangle$. 因为$u_{l-1}=u_{l+1}-u_l$和$u_{k-1}=u_{k-1}-u_k$，而$\overline{u}_{l+1}=\overline{u}_{k+1}$，以及$\overline{u}_l=\overline{u}_k$，由此$u_{l-1}$和$u_{k-1}$除以$m$的余数也应是相等的，即$\overline{u}_{l-1}=\overline{u}_{k-1}$. 但是由此推出$\langle\overline{u}_{k-1},\overline{u}_k\rangle=\langle\overline{u}_{l-1},\overline{u}_l\rangle$，而数对$\langle\overline{u}_{k-1},\overline{u}_k\rangle$在序列(2.1)中比$\langle\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}\rangle$在前面遇到. 所以$\langle\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}\rangle$不是第一个重复的数对，这与我们的假设矛盾. 也就是假设的$k>1$不真，这意味着$k=1$.

于是$\langle 1,1\rangle$是在序列(2.1)中第一个重复的数对. 设它重复在第t个位置(在前面建立的关系中可以认为，$1<t<m^2+1$)，即

$$\langle\overline{u}_t,\overline{u}_{t+1}\rangle=\langle 1,1\rangle$$

这就是说，u_t和u_{k+1}当被m除时所得余数都是1. 即它们的差被m整除. 但

$$u_{t+1}-u_t=u_{t-1}$$

于是第$t-1$个位置的斐波那契数被m整除.

这样一来，我们证明了下面的定理.

定理　对任意的整数m，在前m^2-1个斐波那契数中至少找到一个能被m整除.

我们注意，所证的定理并没有确认哪一个斐波那契数被m整除. 它只是说，第一个被m整除的斐波那契数不应是特别大. 进一步再回到这个问题.

由$\langle 1,1\rangle$是在序列(2.1)中第一个重复的数对，可以推断出余数序列从$\overline{u}_1$开始重复正如起初. 这意味着余数序列呈现周期性，例如，当$m=4$时，在余数序列中这个周期如下

$$1,1,2,3,1,0 \qquad (2.2)$$

在这个情况下周期长等于6. 这样一来，如果数n具有$6k+1$,$6k+2$或者$6k+5$的形式，那么u_n被4除的余数是1. 如果n具有$6k+3$的形式，则余数是2，而如果n具有$6k+4$的形式，则余数是3.

3. 引起我们最大兴趣的是关于斐波那契数的约数的算术性质的问题. 我们能够证明，当n为异于4的合数时，u_n也是一个合数.

实际上，对这样的n，可以将它写成$n=n_1n_2$，其中$1<n_1<n$，$1<n_2<n$并且或者$n_1>2$，或者$n_2>2$. 为确定起见不妨设$n_1>2$，则由刚才证明的定理，u_n被u_{n_1}整除，同时$1<u_{n_1}<u_n$，而这就意味着，u_n是个合数.

4. 在继续研究斐波那契数之前,请读者注意一些最简单的数论知识.

首先介绍求数 a 与 b 的最大公约数的方法.

我们用 b 除 a 带有余数. 设在这种情况下商等于 q_0,余数是 r_1,显然

$$a = bq_0 + r_1$$

且

$$0 \leqslant r_1 < b$$

我们注意,当 $a < b$ 时,有 $q_0 = 0$.

我们再用 b 被 r_1 除,通过 q_1 表示商,r_2 表示余数. 显然,$b = r_1q_1 + r_2$ 且 $0 \leqslant r_2 < r_1$. 因为 $r_1 < b$,则 $q_1 \neq 0$. 然后用 r_2 除 r_1,而得 $q_2 \neq 0$ 和 r_3,使得 $r_1 = q_2r_2 + r_3$ 且 $0 \leqslant r_3 < r_2$,现在进行到此的这个过程还可以延续.

我们的过程或早或晚必须终止. 因为所有正整数 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 互不相同并且它们每一个都小于 b. 也就是,它们的个数不超过 b,过程不迟于 b 个步骤应当结束. 它的中断只能出现在这种情况,当某次除法显现除得尽,也就是余数为零,这时进一步再除它已经不可能了.

上面所述的过程称为欧几里得算法. 对数 a 与 b 运用它的结果得到如下的等式序列

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

我们考察在序列 $a, b, r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中最后的不等于零的项. 并且通过 r_n 表示它. 不言而喻,特别地,它能是数 b(为形式统一可以设 $b = r_0$). 显然,r_{n-1} 被 r_n 整除,现在取在(2.3) 中倒数第二个等式. 在它右边的两个加项被 r_n 整除,所以 r_{n-2} 被 r_n 整除. 我们相信(归纳法!) 依次使用类似方法可得,r_n 整除 r_{n-3}, $r_{n-4}, \cdots$ 到最后 r_n 整除 b 和 a. 于是,r_n 是 a 与 b 的公约数. 我们证明,r_n 是 a 与 b 的最大公约数. 为此,我们只需证明,a 与 b 的所有公约数都整除 r_n.

设 d 是 a 和 b 的任一公约数. 由(2.3) 的第一个等式看到,d 应当整除 r_1. 然后根据(2.3) 的第二个等式得出 d 整除 r_2. 类似地(归纳法!) 可以证明,d 整除 $r_3, \cdots, r_{n-1}$,并且最后 d 整除 r_n.

这样一来,我们已经证明了,对自然数 a 与 b 运用欧几里得算法,的确可以得到它们的最大公约数. a 与 b 的最大公约数,用(a, b) 来表示.

显然,a 被 b 整除当且仅当$(a, b) = b$.

作为例子,我们求$(u_{20}, u_{15}) = (6\ 765, 610)$

$f_1 = f_2 = 1 \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

$$6\,765 = 610 \cdot 11 + 55$$
$$610 = 55 \cdot 11 + 5$$
$$55 = 5 \cdot 11$$

于是

$$(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5$$

那么,两个斐波那契数的最大公约数仍是斐波那契数,这不是意外.今后将证明,永远如此.

5.在几何中寻求两条可公度的线段的公度时遇到类似于欧几里得算法的过程.实际上,我们考察两条线段:一个长为 a,另一个长为 b.由第一条线段减去第二条线段的尽可能大的次数(如果 $b > a$,则显然,我们一次也不能作),并且通过 r_1 表示所剩余的线段长.显然,$r_1 < b$,现在我们由长为 b 的线段减去长为 r_1 的线段尽可能大的次数.仍得剩余的线段通过 r_2 表示.同样的方法进一步进行,便得到线段序列,它们的长显然是递减的.到此,正如我们见到的,与欧几里得算法完全相似.

然而上述几何过程与对自然数的欧几里得算法显示出重要的差别:在减去线段所得的剩余线段序列,可以是不中断的,因为这个减法过程可能不确定地长久地进行下去.显然,这是最初所取两条线段不可公度的情况.

6.我们现在来介绍两个数的最大公约数的一些简单性质.

(a, bc) 可被 (a, b) 整除.事实上,b 被 (a, b) 整除,因而 bc 被 (a, b) 整除;a 显然也被 (a, b) 整除.这就是说,根据第 4 款的证明,(a, bc) 被 (a, b) 整除.

7.$(ac, bc) = (a, b)c$.

证明 设等式(2.3)描述了求 (a, b) 的过程.以 c 遍乘这些等式的每一项.我们容易检验,所得等式组对应着运用于数 ac 和 bc 的欧几里得算法.在这里最后的非零余数等于 r_nc,也就是 $(a, b)c$.

8.若 $(a, c) = 1$,则 $(a, bc) = (a, b)$.事实上,根据第 6 款 (a, bc) 是 (ab, bc) 的约数.但

$$(ab, bc) = (a, c)b = 1 \cdot b = b$$

根据第 7 款,因此 b 整除 (a, bc).另一方面,(a, bc) 是 a 的约数,由于第 4 款所证,就是说 (a, bc) 整除 (a, b),又因为第 6 款 (a, b) 整除 (a, bc),我们得到 $(a, b) = (a, bc)$.

设 bc 被 a 整除,这意味着 $(a, bc) = a$.若在这种情况下有 $(a, c) = 1$,则根据前述有 $(a, b) = a$,也就是 b 被 a 整除.

如果 p 是质数,那么任意的 a 要么被 p 整除,要么与 p 互质.因此,根据前述,如果两个数的乘积被质数 p 整除,那么至少有一个因数能被 p 整除.显然根据归纳法,这个结论可推广到任意个因数乘积的情况.

9.作为例子,我们研究关于二项式系数的约数的一个问题,这对今后是有益的.

定理 若 p 是质数,而 $k \neq 0$ 且 $k \neq p$,则 C_p^k 被 p 整除.

证明 根据 §1 第 14 款的提示

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k}$$

因为实际上这个分数等于整数，它的分子应当被分母整除．但分母的每个因数都比 p 小，所以不能被 p 整除．因此，因为 p 是质数，根据前述，p 不整除它们的乘积，也就是 p 不能整除分母．这意味着分母与 p 互质．

我们将分数的分子看作两个数 p 和 $(p-1)\cdots(p-k+1)$ 的乘积．这个乘积被分母整除．因为 p 同分母互质．分母应整除第二个因数 $(p-1)\cdots(p-k+1)$．设 $(p-1)\cdots(p-k+1) = t\cdot 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k$，则 $C_p^k = tp$，这就是所要证明的．

10．若 c 被 b 整除，则 $(a,b) = (a+c,b)$．

证明 设对数 a 与 b 运用欧几里得算法，得出等式组(2.3)．我们对数 $a+c$ 和 b 也运用这一算法．因为根据条件 c 被 b 整除，那么可以设 $c = c_1 b$；算法的第一步给出等式

$$a + c = (q_0 + c_1)b + r_1$$

这个算法以后各步顺次对我们给出等式组(2.3)中的第二个，第三个，依此类推的各个等式．如前，最后不等于零的余数是 r_n，而这就是说，$(a,b) = (a+c,b)$．

只根据 6 ~ 8 款的结果来证明这个定理，也就是无需重又化归为欧几里得算法的概念和(2.3)的等式组，对读者来说是个有益的练习．

11．**定理** 相邻的斐波那契数互质．

证明 设定理结论不成立，即 u_n 和 u_{n+1} 具有某个公约数 $d > 1$，则它们的差 $u_{n+1} - u_n$ 将被 d 整除．因为 $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$，则 d 应当整除 u_{n-1}．类似可以证明(归纳法！)，d 也能整除 u_{n-2}，也能整除 u_{n-3}，依此类推，最后 d 能整除 u_1．但 $u_1 = 1$，故不可能被 $d > 1$ 整除．所得矛盾使本定理得证．

12．**定理** 等式 $(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$ 成立．

证明 为确定起见，不妨设 $m > n$．我们对数 m 与 n 运用欧几里得算法

$$m = nq_0 + r_1，其中\ 0 \leqslant r_1 < n$$

$$n = r_1 q_1 + r_2，其中\ 0 \leqslant r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3，其中\ 0 \leqslant r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{t-2} = r_{t-1} q_{t-1} + r_t，其中\ 0 \leqslant r_t < r_{t-1}$$

$$r_{t-1} = r_t q_t$$

正如我们已经知道的，r_t 是 m 和 n 的最大公约数．

于是，$m = nq_0 + r_1$，从而

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0 + r_1}, u_n)$$

或者

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n)$$

或根据第 1 款和第 10 款

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n)$$

或由于第 11 款和第 8 款

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$$

类似可证

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1})$$

$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2})$$

$$\vdots$$

$$(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

比较所有这些等式,得到

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

但因为 r_{t-1} 被 r_t 整除,故 $u_{r_{t-1}}$ 也能被 u_{r_t} 整除.那么 $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$.最后注意 $r_t = (m, n)$,即得所求.

特别地,只由刚才所证推出第 1 款定理的逆定理:若 u_n 被 u_m 整除,则 n 被 m 整除.事实上,若 u_n 能被 u_m 整除,则正如第 4 款所见

$$(u_n, u_m) = u_m \tag{2.4}$$

但由所证

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)} \tag{2.5}$$

比较公式(2.4) 和(2.5),得到

$$u_m = u_{(n,m)}$$

也就是 $m = (n, m)$,而这意味着 n 被 m 整除.

13.结合第 1 款的定理和第 12 款定理的推论,我们有,u_n 被 u_m 整除的充分必要条件是 n 被 m 整除.

由此关于斐波那契数的可除性可以由讨论它的角码的可除性来判定.

例如,我们找到某些斐波那契数的"整除性判别法".在"整除性判别法"下,我们理解这里的判别法是,根据它可以确定,一个斐波那契数能否被某一个已知数整除.

斐波那契数是偶数,当且仅当它的角标被 3 整除.

斐波那契数被 3 整除,当且仅当它的角标被 4 整除.

斐波那契数被 4 整除,当且仅当它的角标被 6 整除.

斐波那契数被 5 整除,当且仅当它的角标被 5 整除.

斐波那契数被 7 整除，当且仅当它的角标被 8 整除.

斐波那契数被 16 整除，当且仅当它的角标被 12 整除.

所有这些以及另外类似的可除性判别法，读者可借助在本款开始引入的命题，分别考察第三个，第四个，第五个，第六个，第八个，第十二个等等的斐波那契数而得证.

读者同时可以证明.被 8 除余 4 的斐波那契数不存在，并且也没有被 17 整除的奇斐波那契数.

14. 在本款内我们迅速地转向说明判断"数 a 和 b 被 m 去除得出相同余数"的类型，或者本质上是"差 $a-b$ 被 m 整除"的类型.

我们需要有容易把握，并且适用于由一个类型的判断转移到另一类型的判断的可能性.所以我们正如通常数论中所见到的，形式上写出这样的判断，从而它们作为某种《演算》对象.

定义 若数 a 和 b 被 m 除给出相同的余数，或者若 $a-b$ 被 m 整数，则称数 a 和 b 对模 m 同余. a 和 b 对模 m 同余写为

$$a \equiv b \pmod m$$

显然，若 a 被 m 整除，则

$$a \equiv 0 \pmod m$$

并且反过来也成立.

15. 对同一个模的同余式能与等式类比，我们逐次说明.

引理 若

$$a_1 \equiv b_1 \pmod m$$
$$a_2 \equiv b_2 \pmod m$$
$$\vdots$$
$$a_n \equiv b_n \pmod m$$

则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n \pmod m$$

证明 由条件得出，每个差

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n$$

都被 m 整除.所以它们的和

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$$

也就是差

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

被 m 整除.

这就可得出所需的同余式.

16. 在第 9 款中我们已经建立了，对质数 p 且 $0 < k < p$ 时，

$$C_p^k \equiv 0 \pmod p \tag{2.6}$$

这还能写为

$$C_p^{k+1} \equiv 0 \pmod p \tag{2.7}$$

其中 $0 \leqslant k < p-1$.

这意味着，当 $0 < k < p-1$ 时(2.6)和(2.7)两个同余式都是正确的．将它们相加，得到

$$C_p^k + C_p^{k+1} \equiv 0 \pmod p$$

或者(见 §1 第 11 款)

$$C_{p+1}^{k+1} \equiv 0 \pmod p$$

换句话说，当 p 是质数时，在帕斯卡三角形的第 $p+1$ 行的所有项中除四项(左右两端的)外，都被 p 整除．

不难检验

$$C_{p+1}^0 \equiv C_{p+1}^1 \equiv C_{p+1}^p \equiv C_{p+1}^{p+1} \equiv 1 \pmod p$$

17．同余式(2.6)可以改写成

$$C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^k \equiv 0 \pmod p$$

或者

$$C_{p-1}^{k-1} \equiv -C_{p-1}^k \pmod p$$

这当任意的 $k = 1, 2, \cdots, p-1$ 时成立．这意味着

$$C_{p-1}^0 \equiv -C_{p-1}^1 \equiv C_{p-1}^2 \equiv -C_{p-1}^3 \equiv \cdots \equiv C_{p-1}^{p-1} \pmod p$$

因为 $C_{p-1}^0 = 1$，最后的同余式表明，帕斯卡三角形中第 $p-1$ 行的项中带奇数指标的项对模 p 同余于 1．偶数指标的项对模 p 与 -1 同余．

18．对同一个模的同余式不仅能逐项相加，而且也可以逐项相乘．

引理 若

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod m \\ a_2 &\equiv b_2 \pmod m \\ &\vdots \\ a_n &\equiv b_n \pmod m \end{aligned}$$

则

$$a_1 a_2 \cdots a_n \equiv b_1 b_2 \cdots b_n \pmod m \tag{2.9}$$

证明 我们对 n 进行归纳．

当 $n = 1$ 时，引理不必证明．

我们假设，对某个 n 引理为真(也就是由(2.8)推出(2.9))．并且对它附加同余式条件

$$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod m \tag{2.10}$$

同余式(2.9)和(2.10)分别表示差 $a_1 a_2 \cdots a_n - b_1 b_2 \cdots b_n$，和 $a_{n+1} - b_{n-1}$ 被 m 整除，因此

$$a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_n + mT, a_{n+1} = b_{n+1} + mt$$

其中 T 和 t 都是整数．所得的等式相乘，有

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} + m(b_1 b_2 \cdots b_n t + b_{n+1} T + mTt)$$

右边括号中的是整数．因此

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} \equiv b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} \pmod m$$

而这正是所要证明的．

由所证的引理推出，同余式两边可以乘任意的非负整数次幂．

作为平凡的特殊情况可以得出下面的事实：$4t+1$ 形式的数的乘积仍是 $4t+1$ 形式的数．实际上，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是这样的数，根据条件

$$a_1 \equiv 1 \pmod 4, a_2 \equiv 1 \pmod 4, \cdots, a_n \equiv 1 \pmod 4$$

这些同余式相乘，得到

$$a_1 a_2 \cdots a_n \equiv 1 \pmod 4$$

19. 同余式的约简规则也与等式的约简规则类似：等式两边可以约去任意不为零的数，则同余式两边可以约去与模互质的数.

引理 若

$$ac \equiv bc \pmod m \tag{2.11}$$

并且$(c,m)=1$，则

$$a \equiv b \pmod m \tag{2.12}$$

证明 同余式(2.11)意味着差 $ac-bc$ 被 m 整除. 但

$$ac-bc=(a-c)c$$

因为$(c,m)=1$，所以 m 应当整除差 $a-b$，这就是说(2.12)成立.

20. 下面介绍的被称为《费马小定理》的命题在许多问题中很有效用.

定理 若 p 是质数并且 a 不被 p 整除，则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

证明 我们考察数

$$a, 2a, \cdots, (p-1)a \tag{2.13}$$

它们中任两个对模 p 都不同余. 实际上，由

$$ka \equiv la \pmod p$$

由于$(a,p)=1$，根据第 19 款得出

$$k \equiv l \pmod p$$

也就是 $k-l$ 被 p 整除，但当 $0<k,l<p$ 且 $k=l$ 时这是不可能的.

此外，所考察的数中无论哪一个都不被 p 整除.

这就是说，(2.13) 中所有数当被 p 去除时得出不同的余数 $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$，它们每一个都不等于零. 但(2.13) 中的数 $p-1$ 个，而被 p 除所得的非零余数也是 $p-1$ 个，并且它们全是不同的. 因此，当(2.13) 的数被 p 除的余数(也就是 $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ 中的数) 由每个余数 $1,2,\cdots,p-1$ 恰只遇到一次. 于是我们有

$$a \equiv r_1 \pmod p$$
$$2a \equiv r_2 \pmod p$$
$$\vdots$$
$$(p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod p$$

所有这些同余式逐项相乘，得出

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \cdots r_{p-1} \pmod p \tag{2.14}$$

但正如已经注意到的，数 $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ 也就是数 $1,2,\cdots,p-1$，只是写成另外的顺序而已. 因此，同余式(2.14) 可以改写为

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1) \pmod p \tag{2.15}$$

最后，注意到乘积 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)$ 与 p 互质. 所以同余式(2.15) 可以进行约简

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

这就是的要证明的.

21. 由第 2 款证明的推出，斐波那契数的因数中具有所有的一般的数. 现在我们相信，可以分出某些斐波那契数的类，具有十分具体形式的因数.

例如，成立下面的定理*：

定理 若斐波那契数具有奇数角标，则它的全部奇因数都具有 $4t+1$ 的形式.

证明 公式(1.10)(见 §1 第 9 款) 在 n 为奇数的情况下给出

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + 1$$

由此

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_{n-1}(u_{n-1} + u_n) - u_n^2 = u_{n-1}^2 + u_{n-1}u_n - u_n^2 = -1 \tag{2.16}$$

设 p 是 u_n 的质因数，且 $p \neq 2$. 由(2.16) 得出：$u_{n-1}^2 + 1$ 被 u_n 整除，所以也就被 p 整除. 因此

$$u_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod p$$

这个同余式逐项乘 $\frac{p-1}{2}$ 次幂，得出

$$(u_{n-1}^2)^{\frac{p-1}{2}} = u_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

进一步，$(u_{n-1}, u_n) = 1$，于是 u_{n-1} 不被 p 整除. 我们处于费马小定理的条件，据此

$$u_{n-1}^{p+1} \equiv 1 \pmod p$$

但

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

也就是 $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$. 因此，数 $\frac{p-1}{2}$ 是偶数，这就意味着 p 具有 $4t+1$ 的形式.

于是 u_n 的所有奇质因数都具有 $4t+1$ 的形式. 因此，由于在 18 款末尾指出的，所有它们的乘积，也就是 u_n 的全部奇质因数(见 §1 第 5 款) 也应当具有这种形式.

22. 根据同余定义，当被 m 除给出同一个余数的所有的数，彼此间对模 m 都同余. 反之，如果这些数被 m 除给出不同的余数，那么它们不同余.

被 m 除的余数可以是 $0,1,2,\cdots,m-1$ 这 m 个数中之一. 因此，对模 m 彼此不同余的数可以是不比 m 大.

设 m 是奇数，取数

$$-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2} \tag{2.17}$$

这些数共 m 个，它们中任两个对模 m 都不同余(换句话说，它们的差的绝对值小于 m 且不等于零，这个差不被 m 整除). 因此，每个数都与(2.17) 中写出的数中的一个对模 m 同余. (2.17) 中的数称为模 m 的绝对最小剩余. 显然，每个绝对最小剩余的绝对值小于模的一半.

我们注意，对偶数 m 也能够作出绝对最小剩余系. 会看出它们与(2.17) 有某些不同

$$-\frac{m-2}{2}, -\frac{m-4}{2}, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$$

对偶数 m 的绝对最小剩余系在本书中不需要.

---

* 作者感激斐波那契数爱好者 Л·Г·伏列依什塔德，他注意到这个事实.

23. 设 m 是不被5整除的奇数. 按模 m 组成对数 $5, 2\cdot 5, 3\cdot 5, \cdots, \frac{m-1}{2}\cdot 5$ 的绝对最小剩余序列. 例如, 当 $m = 21$ 时, 这个序列是

$$5, 10, -6, -1, 4, 9, -7, -2, 3, 8$$

我们查明, 对不同的 m, 在这种类型的序列中, 绝对最小剩余的正与负是依次改变的. 它们呈现出与数 m(在十进制中)的末位数码相关.

引理 若 $m = 10t + 1$, 则绝对最小剩余序列按下列方式作出:

t 个正, t 个负, t 个正, t 个负, t 个正.

若 $m = 10t + 3$, 则符号改变图式是这样的:

t 个正, t 个负, t 个正, $t+1$ 个负, t 个正.

若 $m = 10t + 7$, 则在序列中将有 t 个正, $t+1$ 个负, $t+1$ 个正, t 个负, $t+1$ 个正.

若 $m = 10t + 9$, 则我们得到 t 个正, $t+1$ 个负, $t+1$ 个正, $t+1$ 个负, $t+1$ 个正.

证明 我们对四个简述结论的每一个分别进行直接的计算. 我们只限于证明它们中的第一个, 其余的由读者分别给予证明.

于是, 设 $m = 10t + 1$. 显然, 当 $k \leqslant t$ 时, 有 $5k < \frac{m-1}{2}$. 后面的绝对最小剩余是负数(它等于 $-5t + 4$), 对它顺序地在后面一个加上 $t-1$ 个5, 我们得到 t 个负数的全部序列, 它们在 -1 时完结. 然后是正数4, 而在它后面是 $t-1$ 个正数(即到 $4 + (t-1)\cdot 5 = 5t - 1$ 在内), 此后重新呈现负数(由 $-5t + 3$ 到 -2, 总数是 t 个) 最后, 由3到 $5t - 2$ 得到 t 个序列的正项而结束.

这就是所要证明的.

实质上这个引理对我们的主要结果是这种状况, 当 $m = 10t \pm 1$ 时, 在绝对最小剩余序列中有偶数个负项, 而当 $m = 10t \pm 3$ 时, 有奇数个负项.

24. **引理*** 若 p 是形如 $5t \pm 1$ 的质数, 则

$$5^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ 被 } p \text{ 整除}$$

若 p 是形如 $5t \pm 2$ 的质数, 则

$$5^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ 被 } p \text{ 整除}$$

证明 我们有

$$5 \equiv \varepsilon_1 r_1 \pmod p$$
$$2\cdot 5 \equiv \varepsilon_2 r_2 \pmod p$$
$$\vdots$$
$$\frac{p-1}{2}\cdot 5 \equiv \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

其中 $\varepsilon_k r_k$ 是 $k\cdot 5$ 对模 p 的绝对最小剩余. 同时 $r_k > 0$, 而 $\varepsilon_k = \pm 1$ 为指出剩余的符号.

所有这些同余式相乘, 得到

$$1\cdot 2\cdot \cdots \cdot \frac{p-1}{2}\cdot 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_1 r_2 \cdots r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p \qquad (2.18)$$

证明费马小定理引入的方法提醒我们进一步进行讨论.

* 这个引理是最重要的被称为"平方剩余关系律"的数论定理的特殊情况.

正数 $r_1, r_2, \cdots, r_{\frac{p-1}{2}}$ 中每一个都不超过数 $\frac{p-1}{2}$. 如果这些数中找到相同的：$r_k = r_l (1 \leqslant k, l \leqslant \frac{p-1}{2})$，那么有 $5k \equiv \pm 5l \pmod p$，由于 $(5, p) = 1$，于是 $k \equiv \pm l \pmod p$. 但这不能成立，原因是 $-p < k - l < k + l < p$ 和 $k - l \neq 0$. 因此，所有数 $r_1, r_2, \cdots, r_{\frac{p-1}{2}}$ 是不同的. 这意味着这些数是 $1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$ 按某种顺序的排列. 它们全都与模 p 互质，所以约去同余式(2.18)中的乘积 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \frac{p-1}{2}$. 结果得到 $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

根据第 23 款的引理，当 $p = 10t + 1$ 时(由于 p 是奇数，这等价于 p 具有 $5t \pm 1$ 的形式)在乘积 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}}$ 中等于 -1 的因数是偶数个；当 $p = 10t \pm 3$(也就是 p 具有 $5t \pm 2$ 的形式)，等于 -1 的因数是奇数个.

由此直接得到引理的两个结论.

25. 现在我们能够证明斐波那契数对质数可除性的基本性质.

定理 若 p 是形式为 $5t \pm 1$ 的质数，则 u_{p-1} 被 p 整除. 若 p 是形式为 $5t \pm 2$ 的质数，则 u_{p+1} 被 p 整除.

证明 设 p 具有形式 $5t \pm 1$，根据比内公式我们有

$$u_{p-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^{p-1}} \times (1 + C_{p-1}^1\sqrt{5} + C_{p-1}^2(\sqrt{5})^2 + \cdots +$$

$$C_{p-1}^{p-1}(\sqrt{5})^{p-1} - 1 + C_{p-1}^1\sqrt{5} - C_{p-1}^2(\sqrt{5})^2 + \cdots -$$

$$C_{p-1}^{p-1}(\sqrt{5})^{p-1})$$

或者，化简后为

$$u_{p-1} = \frac{1}{2^{p-2}}(C_{p-1}^1 + C_{p-1}^3 5 + C_{p-1}^5 5^2 + \cdots + C_{p-1}^{p-2} 5^{\frac{p-3}{2}})$$

根据第 15 款指出的，这里所列举的所有二项式系数对模 p 都与 -1 同余. 所以

$$2^{p-1} u_{p-1} \equiv -2(1 + 5 + \cdots + 5^{\frac{p-3}{2}}) \pmod p$$

对我们遇到的几何级数求和并顾及到 2^{p-1} 对模 p 与 1 同余. 于是得到

$$u_{p-1} \equiv \frac{1}{2}(1 - 5^{\frac{p-1}{2}}) \pmod p$$

但据前所述，右边括号中的数被 p 整除. 因为 $(p, 2) = 1$，则整个右边部分被 p 整除. 也就是说 u_{p-1} 被 p 整除. 定理的第一个结论得证.

我们转向当 p 形如 $5t \pm 2$ 的情况. 如上面一样，运用比内公式. 我们得到

$$u_{p+1} = \frac{1}{2^p}(C_{p+1}^1 + C_{p+1}^3 5 + C_{p+1}^5 5^2 + \cdots + C_{p+1}^{p} 5^{\frac{p-1}{2}}) \pmod p$$

根据第 16 款在括号中的除两个边缘之外的所有项都被 p 整除. 而 $C_{p+1}^1 = C_{p+1}^p$，当被 p 除时给出余数 1. 所以

$$u_{p+1} \equiv \frac{1}{2}(1 + 5^{\frac{p-1}{2}}) \pmod p$$

在给出情况下运用前面的引理我们得到 u_{p+1} 被 p 整除.

定理得证.

26. 由所证定理得出,对于质数 $p \neq 5$,数 u_{p-1} 或者 u_{p+1} 中的一个被 p 整除. 在此情况下能对这两个数中的另一个说什么呢?明显的是,它应当对模 p 与 1 同余.

为了证明我们发现,对任意的 n 根据(1.9) 和(1.20) 有

$$u_{n-1} + u_{n+1} = \frac{u_{2n}}{u_n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^n - \beta^n} = \alpha^n + \beta^n$$

如果在这种情况下 n 是奇数,则

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2^{-n+1}(1 + 5C_n^2 + 5^2C_n^4 + \cdots + 5^{\frac{n-1}{2}}C_n^{n-1})$$

现在设 n 是质数:$n = p$. 则根据第 9 款的定理,在右边括号中的所有二项式系数都能被 p 整除,我们有

$$2^{p-1}(u_{p-1} + u_{p+1}) \equiv 1 \pmod p$$

或者,引用费马小定理(第 20 款)

$$u_{p-1} + u_{p+1} \equiv 1 \pmod p$$

也就是说,如果左面加项中的一个被 p 整除,那么另一个对模 p 应当与 1 同余.

27. 设 u_n 被某个质数 p 整除,同时无论哪个小于 u_n 的斐波那契数都不被 p 整除. 在这种情况下我们称数 p 是 u_n 的特征因数. 例如 11 是 u_{10} 的特征因数,17 是 u_9 的特征因数,等等.

事实上,除 u_1, u_2, u_6 和 u_{12} 以外的所有斐波那契数都至少具有一个特征因数.

这个事实的证明需要十分复杂的讨论,在本节全部剩余的部分进行. 在这种情况下,我们顺便再建立一系列斐波那契数与它们的可除性相联系的性质.

28. 我们从某个一般理论的数的设想开始.

我们在第 8 款建立的关系乘积对质数 p 的可除性的重要事实,能够证明有时被称作"算术基本定理"的定理.

定理 任意自然数分解为质因数乘积只有一种方法.

证明 首先我们注意,这种分解的可能性是极为简单的事实,并且我们还在 § 1 第 5 款就借助于直接归纳讨论建立了.

为了证明分解的唯一性,考察数 a 的两种可能的质因数分解

$$p_1p_2\cdots p_k = a = q_1q_2\cdots q_l$$

为确定起见,可以认为 $k \leqslant l$. 这里右边应被 p_1 整除. 因此根据在第 8 款指出的,p_1 应整除在右边包含的因数中的至少一个因数. 为确定起见,设 p_1 整除 q_1,因为 q_1 是质数,这只当 $p_1 = q_1$ 时才有可能. 进行约简得到

$$p_2\cdots p_k = q_2\cdots q_l$$

重复这个讨论 k 次(归纳法!),即消去了左边的所有因数,我们对等式得出结果

$$1 = q_{k+1}\cdots q_l$$

但最后只当 $q_{k+1} = \cdots = q_l = 1$ 时才可能. 也就是,质因数 $q_{k+1}, \cdots, q_l$ 不应当存在.

定理得证.

29. 在 a 的质因数分解中,归并所有相同的因子作为幂,得到

$$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \tag{2.19}$$

自然数 a 的这个表示叫做它的标准分解式.

有时为了形式上方便，我们对数的标准分解再附加上任意新的带有零指数的质因数.

30. 容易检验，为使带有标准分解式(2.19)的数 a 被

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \tag{2.20}$$

整除的必要且充分条件是

$$\beta_1 \leqslant \alpha_1, \beta_2 \leqslant \alpha_2, \cdots, \beta_k \leqslant \alpha_k$$

(特别地，如果某个 $\alpha_i = 0$，那么 $\beta_i = 0$.)

现在我们能按新的方式写两个或某些个数的最大公约数.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意组成的自然数，所有的 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是质数，它们中每一个是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少一个的约数. 我们对数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 写出标准分解式

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \cdots p_k^{\alpha_{1k}} \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \cdots p_k^{\alpha_{2k}} \\ &\vdots \\ a_n &= p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \cdots p_k^{\alpha_{nk}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

(这里，所有指数 $\alpha_{ij} \geqslant 0$). 显然，数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任意公约数 d 可以有只由数 $p_1, \cdots, p_k$ 为质因数的自己的标准分解式

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k}$$

在这里每个指数 δ_i，不应当超过包含在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的分解式中 p_i 的每一个与它对应的指数 $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni}$

$$\delta_i \leqslant \alpha_{1i}, \delta_i \leqslant \alpha_{2i}, \cdots, \delta_i \leqslant \alpha_{ni} \tag{2.22}$$

如果这个公因数 d 是最大公约数，那么指数 δ_i 应当是满足对应的不等式(2.22)的所有数中最大的. 但这意味着，每个 δ_i 自然应当是对应的数组 $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni}$ 中最小的一个. 这可以写为

$$\delta_i = \min\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni}\}$$

正如对两个数的最大公约数的情形，数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数通过 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 来表示.

31. 在某种意义下与最大公约数概念对偶的是最小公倍数的概念.

显然，被标准分解式为(2.21)的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 整除的任何数，在自己的标准分解式的所有质因数，即数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，至少包含在分解式(2.21)的一个之中. 此外，公倍数的标准分解式中还可以包含随意的"无关的"因数. 这样一来，数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任一公倍数 m 的标准分解式应当具有形式

$$m = p_1^{\mu_1} p_1^{\mu_2} \cdots p_k^{\mu_k} Q$$

其中 Q 表示所有"无关的"质因数的乘积. 在此时，显然，对任意的 $i = 1, \cdots, k$ 应当有

$$\mu_i \geqslant \alpha_{1i}, \mu_i \geqslant \alpha_{2i}, \cdots, \mu_i \geqslant \alpha_{ni} \tag{2.23}$$

如果 m 是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍，那么，显然，因子 Q 应当全部去掉(即它应当等于 1)，而所有指数 μ_i 应当是满足不等式(2.23)中的最小者. 但最后一点意味着，每个 μ_i 自然应当是 $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni}$ 中的最大数

$$\mu_i = \max\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni}\}$$

数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍通过 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 来表示.

32. 我们证明辅助引理.

引理 无论怎样的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$$\begin{aligned}\max\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\} &= \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-\\ &\min\{\alpha_1,\alpha_2\}-\min\{\alpha_1,\alpha_3\}-\cdots-\min\{\alpha_{n-1},\alpha_n\}+\\ &\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}+\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}+\cdots\pm\\ &\min\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\end{aligned}\tag{2.24}$$

(其中在第二行全部由两个数的最小值组成.在第三行全由三个数的最小值组成,依此类推.)

证明 不失一般性,我们可以从一开始就认为,数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 排列次序是不增的

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n$$

则

$$\max\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=\alpha_1$$

我们计算了(2.24)左边的值.为此我们统计数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中每一个(代数地)包含在它里面多少次.此时两个数 α_i 与 α_j 相等的情况我们将把写有大指标的作为最小值(显然,这是纯粹形式上的规定,不影响所考察的表达式的值).

我们首先注意,α_1 是我们所考察的数中最大的.所以它只包含在(2.24)右边的第一行并且恰是一次.也就是说,在(2.24)右边 α_1 的系数等于1.

现在考察包含在(2.24)右边某个 $\alpha_i(i>1)$ 在第一行只包含它一次.在第二和后面的直到第 i 行包含它为最小值只出现在同 α_i 组合在一起的数的指标都比 i 小的时候.对每个第 i 行($j\leqslant i$)这个包含的数目等于由 $i-1$ 个数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$ 中取 $j-1$ 个的组合数,即 C_{i-1}^{j-1}(见§1第14款).因此包含 α_i 的总数等于

$$1-C_{i-1}^1+C_{i-1}^2-\cdots\pm C_{i-1}^{i-1}$$

根据§1第13款这个表达式等于0.

因此,(2.24)右边等于 α_1,也就是等于左边.引理得证.

33. 利用所证引理写出某些数的最小公倍是方便的.

定理

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\frac{a_1a_2\cdots a_n(a_1,a_2,a_3)(a_1,a_2,a_4)\cdots}{(a_1,a_2)(a_1,a_3)\cdots(a_{n-1},a_n)(a_1,a_2,a_3,a_4)\cdots}\tag{2.25}$$

(这里,在分子上是这样一些数的乘积:原来的 n 个数,它们所有可能的三数组的最大公约数,它们所有可能的五数组的最大公约数.依此类推;在分母上是如下一些数的乘积:原来 n 个数中两两的最大公约数,原来 n 个数中四数组的最大公约数,依此类推.)

证明 设 p 是包含于某个 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的标准分解式中的质因数.包含在 a_i 的标准分解式中的 p 的指数通过 α_i 表示.则在(2.25)的左边根据第30款包含 p 的指数是

$$\max\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\tag{2.26}$$

而在(2.25)的右边,根据29款,指数为

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-\min\{\alpha_1,\alpha_2\}-\min\{\alpha_1,\alpha_3\}-\cdots-\\ &\min\{\alpha_{n-1},\alpha_n\}+\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}+\\ &\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}+\cdots\pm\end{aligned}$$

$$\min\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\} \tag{2.27}$$

根据前述引理表达式(2.26)和(2.27)彼此相等.

因此,在(2.25)的左边与右边的标准分解式中所含质因数相同并且每个相同质因数的指数也是相等的.

34.我们转到研究斐波那契数的可除性.

引理

$$u_{mn-1}-u_{n-1}^{m}\text{ 被 }u_n^2\text{ 整除} \tag{2.28}$$

证明　对 m 进行归纳.

当 $m=1$ 时,被除数变为 0,所以被 u_n^2 整除.现在假设(2.28)的整除性为真.我们考虑

$$u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{m+1}=(u_{mn-1}u_{n-1}+u_{mn}u_n)-u_{n-1}^{m+1}$$

但根据归纳假设

$$u_{mn-1}\equiv u_{n-1}^{m}(\bmod u_n^2)$$

因此

$$\begin{aligned}&u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{(m+1)}\equiv\\&u_{n-1}^{m}u_{n-1}+u_{mn}u_n-u_{n-1}^{m+1}(\bmod u_n^2)\end{aligned} \tag{2.29}$$

正如由第 1 款得出,u_{mn} 被 u_n 整除,所以

$$u_{mn}u_n\equiv 0(\bmod u_n^2)$$

(2.29)变为

$$u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{m+1}\equiv 0(\bmod u_n^2)$$

根据归纳过程,引理得证.

35.引理

$$u_{mn}-u_{n-1}^{m}+u_{n-1}^{m}\text{ 被 }u_n^3\text{ 整除} \tag{2.30}$$

证明　对 m 进行归纳.

当 $m=1$ 时,被除数等于 0,所以被 u_n^3 整除.

假设,(2.30)的可除性成立,我们考察

$$u_{(m+1)n}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}=u_{mn-1}u_n+u_{mn}u_{n+1}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}$$

但根据归纳假设

$$u_{mn}\equiv u_{n+1}^{m}-u_{n-1}^{m}(\bmod u_n^3)$$

因此

$$\begin{aligned}&u_{(m+1)n}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}\equiv\\&u_{mn-1}u_n+u_{n+1}(u_{n+1}^{m}-u_{n-1}^{m})-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}(\bmod u_n^3)\end{aligned}$$

或者

$$u_{(m+1)n}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}\equiv u_{mn-1}u_n-u_{n-1}^{m}(u_{n+1}-u_{n-1})(\bmod u_n^3)$$

或者

$$u_{(m+1)n}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}\equiv u_n(u_{mn-1}-u_{n-1}^{m})(\bmod u_n^3)$$

根据上款引理得知,右边的差被 u_n^2 整除,所以整个右边部分被 u_n^3 整除.也就是对模 u_n^3 同余于 0,这就是要证的.

36. 设 p 是质数. 正如在第 1 款所证, u_{np} 被 u_n 整除. 所以当由 u_n 变到 u_{np} 的过程中, 第一, 可能出现新的质因数, 第二 u_n 本身质因数成员的指数可能上升. u_n 所有质因数中, 难道只有 p 的指数能上升吗? 由我们马上要证的定理可以推出, 如果 $p \neq 2$, p 的指数只增加 1, 而如果 $p = 2$, 那么增加不多于 2.

定理 如果 q 是 u_n 是异于 p 的质因数, 那么 $\frac{u_{np}}{u_n}$ 不被 q 整除.

如果 p 是 u_n 的奇质因数, 那么 $\frac{u_{np}}{u_n}$ 被 p 整除但不被 p^2 整除.

如果 u_n 被 4 整除, 那么 $\frac{u_{2n}}{u_n}$ 被 2 整除, 但不被 4 整除.

如果 u_n 被 2 整除, 但不被 4 整除, 那么 $\frac{u_{2n}}{u_n}$ 被 4 整除, 但不被 8 整除.

证明 假设在前面引理中 $m = p$, 得到

$$u_{np} - u_{n+1}^p + u_{n-1}^p \text{ 被 } u_n^3 \text{ 整除}$$

但 u_{np} 被 u_n 整除, 根据第 1 款

$$u_{n+1}^p - u_{n-1}^p = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}^{p-1}) =$$
$$u_n(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \cdots + u_{n+1}^{p-1})$$

因此, 差

$$\frac{u_{np}}{u_n} - (u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}^{p-1}) \tag{2.31}$$

被 u_n^2 整除.

第一, 由此推出, 差 (2.31) 被 u_n 整除. 这意味着

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{u_n} \tag{2.32}$$

但显然

$$u_{n+1} \equiv u_{n-1} \pmod{u_n}$$

所以由 (2.32) 得出

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-1} + \cdots + u_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}$$

因为右边有 p 个加项, 应当有

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p u_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}$$

因此, 数 $\frac{u_{np}}{u_n}$ 和 u_n 的任何公约数应也被 p 整除, 反过来也对, 这就是说

$$\left(\frac{u_{np}}{u_n}, u_n\right) = (p, u_n)$$

现在如果 q 是 u_n 异于 p 的质因数, 那么 (p, u_n) 等于 1 或者 p, 不能被 q 整除.

因此, $\left(\frac{u_{np}}{u_n}, u_n\right)$ 等于 1 或 p, 也不被 q 整除. 但因为 u_n 被 q 整除, q 不整除 $\frac{u_{np}}{u_n}$, 定理第一部分得证.

第二, 如果 p 是 u_n 的质因数, 那么由差式 (2.31) 能被 u_n^2 整除, 推出

$$\frac{u_{np}}{u_n}\equiv u_{n+1}^{p-1}+u_{n+1}^{p-2}u_{n-1}+\cdots+u_{n-1}^{p-1}\pmod{p^2}$$

u_{n+1} 和 u_{n-1} 两个分别对 p 作带余除法，设

$$u_{n+1}\equiv r_1p+r'\pmod{p^2}$$
$$u_{n-1}\equiv r_2p+r''\pmod{p^2}$$

其中 $0\leqslant r_1,r_2,r',r''<p$(因为差 $u_{n+1}-u_{n-1}$ 等于 u_n，即被 p 整除，余数 r' 和 r'' 应当相等；所以我们设 $r'=r''=r$)；因为或是 u_{n-1} 或是 u_{n+1} 都不被 p 整除，此时，$r\neq 0$.

那么

$$\begin{aligned}\frac{u_{np}}{u_n}\equiv&(r_1p+r)^{p-1}+(r_1p+r)^{p-2}(r_2p+r)+\cdots+\\&(r_1p+r)^{p-k}(r_2p+r)^{k-1}+\cdots+\\&(r_2p+r)^{p-1}\pmod{p^2}\end{aligned}$$

打开右边的括号，消去被 p^2 整除的项. 同余式右边第 k 项

$$(r_1p+r)^{p-k}(r_2p+r)^{k-1}$$

在这时得到

$$C_{p-k}^1r_1pr^{p-k-1}r^{k-1}+r^{p-k}C_{k-1}^1r_2pr^{k-2}+r^{p-k}r^{k-1}$$

或者

$$(p-k)pr_1r^{p-2}+(k-1)pr_2r^{p-2}+r^{p-1}$$

对所有项，也就是按 $k=1,\cdots,p$. 这个表达式相加，我们得到

$$\frac{u_{np}}{u_n}\equiv\frac{p(p-1)}{2}pr_1r^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2}pr_2r^{p-2}+pr^{p-1}\pmod{p^2}\qquad(2.33)$$

如果 $p\neq 2$，则$\frac{p-1}{2}$ 是整数，所以在(2.33)右边前两个加项都被 p^2 整除. 我们得到

$$\frac{u_{np}}{u_n}\equiv pr^{p-1}\pmod{p^2}$$

最后，根据费马小定理(见第20款). $r^{p-1}-1$ 被 p 整除，就是说，$pr^{p-1}-p$ 被p^2 整除. 顾及这一点，最后得到

$$\frac{u_{np}}{u_n}\equiv p\pmod{p^2}$$

这样一来，$\frac{u_{np}}{u_n}$ 当除以p^2 时余数是 p，即它被 p 整除，但不被 p^2 整除. 我们证明了第二部分.

现在设 $p=2$，则(2.33)可以改写为

$$\frac{u_{2n}}{u_n}\equiv 2(r_1+r_2+r)\pmod 4\qquad(2.34)$$

如果 u_n 被4整除，则由余数序列(2.2)看出，在这种情况下无论 u_{n-1} 还是 u_{n+1} 被4除都余1. 因此，在这种情况下 $r_1=r_2=0$ 而 $r=1$ 并且(2.34)变为

$$\frac{u_{2n}}{u_n}\equiv 2\pmod 4$$

这就证明了定理的第三部分.

最后,设 u_n 不被4整除,序列(2.2)证明了,现在 $r_1=1,r_2=0$ 且 $r=1$,所以(2.34)变为

$$\frac{u_{2n}}{u_n}\equiv 0(\bmod 4)$$

剩下我们证明$\frac{u_{2n}}{u_n}$不被8整除.但如果是这样的话,项 u_{2n} 被16整除.根据第13款指出的 $2n$ 应被12整除,也就是 n 应被6整除.但由此又推出 u_n 应被 u_6 整除,也就是 u_n 就被8整除.而这与前设矛盾(即 u_n 甚至不被4整除).

至此定理证完.

37.现在我们可以直接证明斐波那契数存在特征因数.

定理 除 u_1,u_2,u_6 和 u_{12} 之外的任意斐波那契数至少有一个特征因数.

证明 我们考察斐波那契数 u_n.设数 n 的标准分解式是

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

我们取所有的斐波那契数

$$u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},\cdots,u_{\frac{n}{p_k}} \tag{2.35}$$

并且作出它们的最小公倍 M.根据第33款

$$M=\frac{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\cdots u_{\frac{n}{p_k}}\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},u_{\frac{n}{p_3}}\right)\cdots}{\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}}\right)\cdots\left(u_{\frac{n}{p_{k-1}}},u_{\frac{n}{p_k}}\right)\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},u_{\frac{n}{p_3}},u_{\frac{n}{p_4}}\right)\cdots}$$

但对任意 r 且 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 都不相同

$$\left(u_{\frac{n}{p_{i_1}}},u_{\frac{n}{p_{i_2}}},\cdots,u_{\frac{n}{p_{i_r}}}\right)=u_{\left(\frac{n}{p_{i_1}},\frac{n}{p_{i_2}},\cdots,\frac{n}{p_{i_r}}\right)}=u_{\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r}}}$$

所以

$$M=\frac{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\cdots u_{\frac{n}{p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}\cdots}{u_{\frac{n}{p_1p_2}}u_{\frac{n}{p_1p_3}}\cdot\cdots\cdot u_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}}\cdots}$$

但 u_n 被所有数 $u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},\cdots,u_{\frac{n}{p_k}}$ 整除,因此被这些数的最小公倍 M 整除

$$u_n=Mt$$

M 的任意质因数都整除(2.35)的数中的一个,所以是 u_n 的非特征因数.因此 u_n 的所有特征因数应整除 t.根据第36款的定理,u_n 的非特征因数能包含在 t 中真的只有 $p_1,p_2,\cdots,p_k$,同时包含在 t 中的这些数的每一个的指数不大于1,只有2例外,包含2的指数可以是2.

证明不等式

$$t>\underset{\times}{2}\,p_1p_2\cdots p_k$$

(2下面的×这里及以后表示:这个2事实上只在这种情况下存在,即当数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 中已经有一个2),我们证明斐波那契数 u_n 的特征因数的存在性.

于是,我们证明

$$t=\frac{u_nu_{\frac{n}{p_1p_2}}u_{\frac{n}{p_1p_3}}\cdots u_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}}\cdots}{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\cdots u_{\frac{n}{p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}\cdots}>\underset{\times}{2}\,p_1p_2\cdots p_k$$

在 §1 第 21 款已经证明了

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}$$

所以，如果在分数分子上的所有斐波那契数以$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}}$替换，而在分母上的所有斐波那契数以$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}$替换.那么分数只是减小.对新的分数证明需要的不等式，我们建立的甚至比需要的更大.

完成指出的替换并且进行约去$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2k-1}$，得到

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2}-\frac{p_1p_2}{n}}\cdots\alpha^{\frac{n}{p_{k-1}p_k}-\frac{p_{k-1}p_k}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}-\frac{p_1p_2p_3p_4}{n}}}{\alpha^{\frac{n}{p_1}+\frac{p_1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_2}+\frac{p_2}{n}}\cdots\alpha^{\frac{n}{p_k}+\frac{p_k}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3}+\frac{p_1p_2p_3}{n}}\cdots} > \frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k$$

或者

$$\frac{\alpha^{n\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\cdots-\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{k-1}p_k}-\frac{1}{p_1p_2p_3}-\cdots\right)}}{\alpha^{\frac{1}{n}(1+p_1+p_2+\cdots+p_k+p_1p_2+\cdots+p_{k-1}p_k+p_1p_2p_3+\cdots)}} > \frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k$$

或者

$$\alpha^{n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k)} > \frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k$$

或者，取对数

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k) >$$
$$\log_a\frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k$$

联想到数 n 的标准分解式.我们可以将这个不等式改写为

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)-$$
$$\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}} > \log_a\frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k$$

表达式 $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$ 照例通过 $\varphi(n)$ 表示，这个函数 φ 称做欧拉函数.它具有许多重要且有趣的性质.

引入欧拉函数符号，我们得到

$$\varphi(n) > \frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}}+\log\frac{2}{\times}p_1p_2\cdots p_k \tag{2.36}$$

剩下我们检验对怎样的正整数 n 所写的不等式成立.我们称这些值是“好的”，与此区别是“不好的”，对“不好的”值(2.36)不成立.显然，对于好的 n 值斐波那契数 u_n 有特征因数.我们强调指出，反过来可能是不成立的：不等式(2.36)的正确性只是充分的，但绝不是 u_n 具备特征因数的必要条件.所以，带有不好的指标的斐波那契数(它们有十个数)应该补充作具备特征因数的检验.这个检验的结果发现，这十个数中的六个数具有特征因数，而 4 个(列举在定理条件中)不具有特征因数.

直接观察看，(2.36)的左边随 n 的增加而增加实质上比右边快.所以从最开始作的假设对不等式(2.36)的破坏只发生在 n 值不大的时候.但不等式两边当 n 增加时也增加的总倾

向,是以极不正常的方式的变化.任何一个直接归纳的讨论几乎都不适用,因此提供下面的运算纲领是自然的,我们拟定某个顺序列举(描画)自然数的某个图式,在这个图式下由“好的”数只能转移到“好的数”.如果在某步运用这个图式全部得到的数是“好的”数,那么所有后面的数也是“好的数”.因此,所有“不好的”数到这步应该是已经被列举.读者能够发现,这种讨论方法也是根据归纳法证明的一种变式.

我们预先证明下面三个结论.

1.设 $p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots$ 是按增加次序列举的全体质数(即 $p_1=2,p_2=3$,依此类推).那么,如果数 $n=p_1p_2\cdots p_k$ 是“好的”而且 $p_{k+1}>3$,则数 $p_1p_2\cdots p_kp_{k+1}$ 也是“好的”.

事实上,在所给情况下我们有

$$n=p_1p_2\cdots p_k$$
$$\varphi(n)=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$$

并且根据条件应当有

$$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)>$$
$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)+\log_a\underset{\times}{2}\,p_1p_2\cdots p_k \tag{2.37}$$

为了对它写出与乘积 $p_1p_2\cdots p_kp_{k+1}$ 对应的不等式,必须对(2.37)右边第一加项乘以 $1+\frac{1}{p_{k+1}}$,它小于2,而第二加项添加 $\log_a p_{k+1}$.但数 $p_1p_2\cdots p_k-1$ 同质数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 每一个都互质.因此,它的每个质因数 q 大于这些数中任一个,所以不小于 p_{k+1}.这意味着

$$p_{k+1}<p_1p_2\cdots p_k$$

更有

$$p_{k+1}<\underset{\times}{2}\,p_1p_2\cdots p_k$$

所以

$$\log_a p_{k+1}<\log\underset{\times}{2}\,p_1p_2\cdots p_k$$

因此,对第二加项添加 $\log_a p_{k+1}$ 这个加项增加小于一倍.

于是,右边的增加不能比2倍大.但右边增加 $p_{k+1}-1$ 倍,大于2.这样一来,由(2.37)推出

$$(p_1-1)\cdots(p_k-1)(p_{k+1}-1)>$$
$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)\left(1+\frac{1}{p_{k+1}}\right)+\log_a\underset{\times}{2}\,p_1\cdots p_kp_{k+1}$$

这就是要证明的.

2.如果 $n=p_1p_2\cdots p_k$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是任意不同的质数,n 是“好的”数,而 q 是不同于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 且大于 p_1 的任意质数,那么 $qp_2\cdots p_k$ 也是“好的”数.

其实,在这种情况下不等式(2.36)重新具有(2.37)的形式.在这里将所有的 p_1 都用 q 替换.对不等式(2.37)左边添加乘积 $(q-p_1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$.而在右边第一个加项乘以 $\dfrac{1+\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p_1}}$ 且对第二加项添加 $\log_a\frac{q}{p_1}$.由于 $q>p_1$,第一个加项由这个乘法可以只是减小.

这意味着,为了保持不等式的力量,使得

$$(q-p_1)(p_2-1)\cdots(p_n-1) > \log_\alpha \frac{q}{p_1}$$

就足够了,更进一步,使得

$$q-p_1 > \log_\alpha \frac{q}{p_1} \tag{2.38}$$

就足够了.

然而,当 $n \geqslant 3$ 时,$\alpha > \frac{n}{n-1}$,于是

$$1 > \log_\alpha \frac{n}{n-1}$$

并且,这种形式的不等式按照 n 由 $n = p_1 + 1$ 到 $n = q$ 求和,我们就得到(2.38).

3. 如果 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是“好数”,那么 $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 也是“好数”.

为了证明只要发现下面的事实就足够了:在不等式

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) >$$
$$\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}} + \log_\alpha \underset{\times}{2}\, p_1p_2\cdots p_k$$

中当替换指数 α_1 为大的数 α_1+1 时,左边增加而右边减少.因此,这个变换的结果“好数”也只能变为“好数”.

这样一来,在我们的支配下,成为三种对数上面的运作程序,能够变一个数为另一个数,同时由“好数”可以只变为“好数”的三种方法.

这些程序中的第一种在于构作序列 1,2,6,30,210,…;第二种是对标准分解式中只含有质数一次幂的数,代换它的任意质因数为大的不包含在标准分解式中的质数(为确定起见,我们将认为,进行代换为“上面”最邻近的质数);第三种程序是在标准分解式中某个指数增加 1.在这样的列举中某些数遇到会多于一次,但这种状况对我们不起任何作用.重要的是在计算中每个数都至少遇到一次.

我们着手按照所指出的列举自然数.开始利用第一种程序.

数 1 是“不好”的数,因为对它不等式(2.36)变为

$$1 > 1 + \log_\alpha \underset{\times}{2} = 1 + \log_\alpha 1 = 1$$

(包含 0 个因数的自然数的乘积,我们取最前边的等于 1),这不正确.

第一种程序由对 1 的运用到对 2 的运用,为此,不等式

$$1 > \frac{3}{2} + \log_\alpha \underset{\times}{2} = \frac{3}{2} + \log_\alpha 4$$

也不正确,所以 2 也是“不好的”数.

下面“不好”的数将是 6 和 30,对它们

$$\varphi(6) = 2 < \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} + \log_\alpha 12 = 2 + \log_\alpha 12$$

$$\varphi(30) = 8 < \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5} + \log_\alpha 60 \approx 2.4 + 8.5$$

与此相反,数 $2\cdot3\cdot5\cdot7 = 210$ 已经成为“好数”,因为

$$\varphi(210) = 48 > \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} + \log_\alpha 420 \approx 2.7 + 12.5$$

所以运用第一种程序得出的后面所有的数都是“好的”数.我们将运用第二种第三种程序.

对数 2 运用它们给我们 3 和 4 也是“不好的”数

$$\varphi(3) = 2 < \frac{4}{3} + \log_{\alpha}3 \approx 1.3 + 2.3$$

$$\varphi(4) = 2 < \frac{3}{4} + \log_{\alpha}4 \approx 0.75 + 2.9$$

对数 3 运用程序分别给出 5 和 9,并且容易检验,数 5 是“不好的”,而 9 是“好的”数,进一步对 9 进行变换我们没有兴趣.进一步由 5 按第二种程序能变换到数 7,按第三种程序变换到 25.这两个数都是“好的”数.所以由它们产生的所有的数也是“好的”数,它们可以不考察了.

对 4 运用第三种程序产生“好数”8.

于是对 2 运用第二种、第三种程序得出的任何数中给我们 3、4、5 是“不好的”数,而全部其余的数是“好的”数.

转向数 6.第二种程序得出 10 是“不好的”数,此后得到“好的”数 20 和 15 以及“不好的”数 14.但在“不好的”数 14 的后面得到“好的”数 21 和 22(第二种程序),则 28 和 98 也是“好的”数(第三种程序).

对 6 运用第三种程序,得出“不好的”数 12 和“好的”数 18.但在 12 后面根据第三种程序得出 24 和 36 都是“好的”数.而第二种程序对数 12 不能运用,因为 12 被质数 2 的平方整除.

最后由数 30 得到(相应的 210,42 和 60)的全是“好的”数.

全部进行的讨论直观地写为下面的图式(图 1).

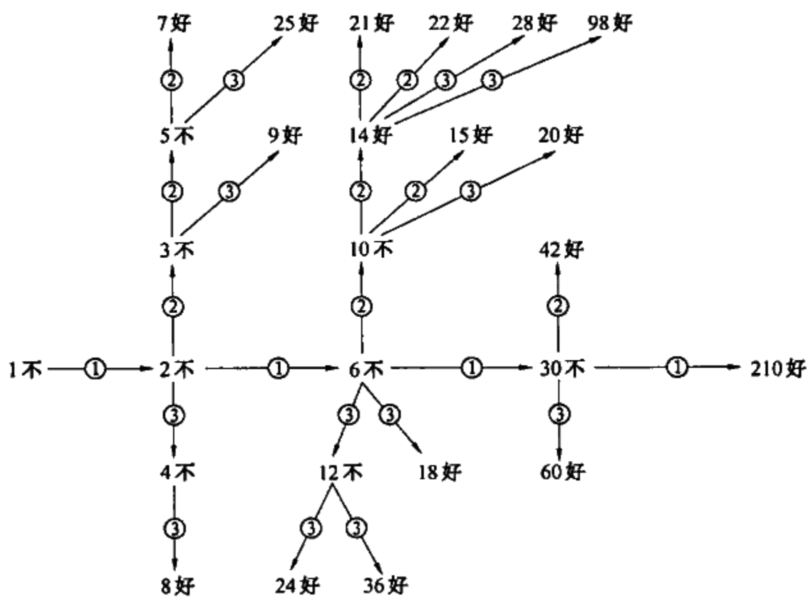


图 1

结果我们得到“不好”数的如下名单

$$1,2,3,4,5,6,10,12,14,30$$

对应的斐波那契数是

$$1,1,2,3,5,8,55,144,377,832\ 040$$

显见，u_3，u_4，u_5，u_{10}和u_{14}的特征因数分别是数2，3，5，11和29. 可以写出直到u_{30}的所有斐波那契数，并且将它们分解质因数，直接确认u_{30}存在特征因数. 但是不需要这样做，由第25款的定理推出，u_{30}被31整除(因为31是$5t+1$形式的质数). 另一方面，无论$u_6=8$或是$u_{10}=55$或是$u_{15}=610$都不被31整除. 因此，31是u_{30}的特征因数.

剩下的数$u_1=1$，$u_2=1$，$u_6=8$和$u_{12}=144$，显然，它们没有特征因数.

定理得证.

38. 有四个斐波那契数不具有特征因数. 除此之外的斐波那契数都有特征因数，并且存在具有多个特征因数的斐波那契数. 例如，对于u_{19}，特征因数是数37与113，对于u_{27}，特征因数是数53与109，等等. 具有两个或更多特征因数的斐波那契数有多少呢？—— 完全不清楚.

自然地提出这样的问题，指标n是什么数时对应的斐波那契数的特征因数是给定的质数p？

由第25款推出，若p是$5t\pm1$形式的质数，$n\leqslant p-1$；如果p是形式为$5t\pm2$的质数，$n\leqslant p+1$. 但是从预先给定的特征因数p，能够直接计算斐波那契数指标项的任何公式，我们几乎还不知道.

在第3款我们证明了，除u_4以外，带有合数指标的斐波那契数是合数，反过来不成立. 因为，例如$u_{19}=4\ 181=37\cdot113$. 因此提出这样的问题：所有质数的斐波那契数是有限个还是无限多个？换句话说，质数的斐波那契数中是否存在最大的一个？这个问题现在与解决的距离尚很遥远.

§3 斐波那契数与连分数

1. 我们考察表达式

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{3.1}$$

其中 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是正整数，而 q_0 是非负整数. 这样一来，与数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 不同的是数 q_0 可以等于 0. 数 q_0 的假定多少有些特别. 我们要常记心头，以后将不再每次提及.

表达式(3.1) 叫做连分数，数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 叫做这个连分数的不完全商. 而所有形如

$$\omega_k = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}} \tag{3.2}$$

的连分数，对于 $k = 0, 1, \cdots, n-1$，叫做连分数的完全商.

显然，完全商 ω_k, ω_{k+1} 和相应的不完全商 q_k 彼此之间用关系式

$$\omega_k = q_k + \frac{1}{\omega_{k+1}} \tag{3.3}$$

联系着.

由于每个 $q_k(k=1,\cdots,n-1)$ 是正整数，而对它添加的分数非负，所以完全商(3.2)中的每一个应当是大于1的.

有时连分数也称为连锁分数.连分数在多种多样的数学问题中都有应用.希望详细了解它们的读者，可以参阅 A.Я.辛钦写的书《连分数》(莫斯科：科学，1978).

2.将某一个数变为连分数的过程叫做展开这个数成为连分数.

现在我们来看将一个普通分数 $\frac{a}{b}$ 作这样的展开时，怎样去求不完全商.

为此，考察对数 a 和 b 运用欧几里得算法.

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

由这些等式中的第一个等式，得到

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}}$$

但由等式组(3.4)中第二个等式，得到

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}$$

于是

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}$$

由(3.4)中第三个等式，得到

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}$$

所以

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}$$

不难看出,继续这个过程到结束(归纳法!),得到等式

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

按照欧几里得算法的本来意义,$q_n>1$(如果 q_n 等于 1,则 r_{n-1} 等于 r_n 并且 r_{n-2} 可被 r_{n-1} 整除,也就是全部算法应在前一步停止). 这意味着,我们在所考察的表达式中可以用 $(q_n-1)+\frac{1}{1}$ 代替 q_n,也就是,可以认为 (q_n-1) 是倒数第二个不完全商,而 1 是最后一个不完全商. 这个规定对于今后的讨论显得很方便.

3. 我们看到,任何有理分数 $\frac{a}{b}$,可以展开为连分数. 我们证明,这个展开是唯一的. 也就是两个相等的连分数对应的不完全商应该相等.

为了证明这一结论,我们取两个连分数 w 和 w',设 $q_0,q_1,q_2,\cdots$ 和 $q'_0,q'_1,q'_2,\cdots$ 分别是它们的不完全商. 我们证明,由等式 $w=w'$ 推出 $q_0=q'_0,q_1=q'_1,q_2=q'_2$,依此类推. 其实,$q_0$ 是数 w 的整数部分,而 q'_0 是数 w' 的整数部分,所以 $q_0=q'_0$. 进一步,连分数 w 和 w' 可以分别表示为 $q_0+\frac{1}{w_1}$ 和 $q'_0+\frac{1}{w'_1}$,其中 w_1 和 w'_1 又是连分数. 由 $w=w'$ 和 $q_0=q'_0$ 推出 $w_1=w'_1$. 这意味着数 w_1 和 w'_1 的整数部分相等,即 $q_1=q'_1$. 继续这些讨论(归纳法!),可以确信 $q_2=q'_2,q_3=q'_3$,依此类推.

4. 设

$$w=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_n}}}} \tag{3.5}$$

是某个连分数,我们讨论下列的数:$q_0,q_0+\frac{1}{q_1},q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\cdots$,将这些数写为普通的某个分数的形式

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1}$$

$$\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = w$$

叫做连分数 w 的收敛分数.我们发现,由$\frac{P_k}{Q_k}$变为$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$可在这个收敛分数的结构中参与替换数的后一个不完全商来实现,也就是将 q_k 替换为 $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.正是在这个意义下,变收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$为整个连分数 w,是将最后一个不完全商 q_k 替代为 $q_k + \frac{1}{w_{k+1}}$ 来实现的,也就是对应完全商 w_k.

5.在连分数理论中,下面的引理起着重要的作用.

引理　对于一切连分数(3.5),下列关系式成立

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \tag{3.6}$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \tag{3.7}$$

$$P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \tag{3.8}$$

我们同时对 k 进行归纳来证明这些等式.

我们首先对 $k = 1$ 来证明

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$$

因为数 $q_0 q_1 + 1$ 与 q_1 互质.分数$\frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$是既约分数.由定义,分数$\frac{P_1}{Q_1}$也是既约分数.而相等的既约分数分子相等,分母也相等,这就是说,$P_1 = q_0 q_1 + 1$ 以及 $Q_1 = q_1$.进一步

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2}{q_1 q_2 + 1} \tag{3.9}$$

数 $q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2$ 和 $q_1 q_2 + 1$ 的最大公约数,根据 §2 第 10 款等于$(q_2, q_1 q_2 + 1)$.并且根据同一命题,等于$(q_2, 1)$ 也就是 1,这表明在(3.9) 右边的分数是既约分数,所以

$$P_2 = q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2 = (q_0 q_1 + 1)q_2 + q_0 = P_1 q_2 + P_0$$

和

$$Q_2 = q_1 q_2 + 1 = Q_1 q_2 + Q_0$$

等式 $P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = (-1)^1$ 也不难检验.

这就是证明的归纳基础.

现在假定等式(3.6),(3.7)和(3.8)是对的.我们考察收敛分数

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_kq_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kq_{k+1}+Q_{k-1}} \tag{3.10}$$

根据前面作出的发现,由$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$变到$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$可以用$q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}$替代表达式$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$中的$q_{k+1}$来实现;因为在$P_k,Q_k,P_{k-1},Q_{k-1}$的表达式中不包含量$q_{k+1}$,我们有

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_k\left(q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}\right)+P_{k-1}}{Q_k\left(q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}\right)+Q_{k-1}}$$

或者,记住归纳假设(3.6)和(3.7)

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_{k+1}q_{k+2}+P_k}{Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k} \tag{3.11}$$

我们证明,(3.11)右边是既约分数,为此只需证明,它的分子与分母互质即可.

假设数$P_{k+1}q_{k+2}+P_k$与$Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$有某个公约数$d>1$,则表达式

$$(P_{k+1}q_{k+2}+P_k)Q_{k+1}-(Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k)P_{k+1}$$

也应被d整除.但根据归纳假设(3.8)这个表达式等于$(-1)^{k+1}$而不可能被d整除.

于是(3.11)的右边是一个既约分数.这样一来,(3.11)是由两个既约分数做成的等式,这意味着

$$P_{k+2}=P_{k+1}q_{k+2}+P_k$$

及

$$Q_{k+2}=Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$$

为了完成归纳推演的证明,我们剩下指出

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=(-1)^{k+1} \tag{3.12}$$

但由于只证明

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1}+P_kQ_{k+1}-P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_k$$

就可以由归纳假设(3.8)直接得出(3.12).这些归纳推演已被建立,整个引理得到证明.

推论

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}} \tag{3.13}$$

证明是显然的.

因为连分数的不完全商是正整数.由所证引理得出

$$P_0 < P_1 < P_2 < \cdots$$
$$Q_0 < Q_1 < Q_2 < \cdots \tag{3.14}$$

这个简单但重要的注解今后我们还要说明.

6. 等式(3.8) 可以引进归纳讨论到最小值而更直接地得到. 这个推导引起我们的兴趣还在于,得到它的过程中的中间结果对我们今后是有用的.

在第4款结尾写的由收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$向在连分数中数w的分解数的换演,是由完全商w_k替代不完全商q_k做成的. 也就是用某个大的数来替代. 这意味着这个代换的结果$q_{k-1}+\frac{1}{q_k}$减少. 分数$q_{k-2}+\cfrac{1}{q_{k-1}+\cfrac{1}{q_k}}$是增加的,依此类推(归纳法!). 于是整个分数$w$将比收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$大或者小,这要看数$k$是奇数或者是偶数.

换句话说,带奇指标的收敛分数是大于分解数的,而带偶指标的收敛分数小于分解数(不言而喻,最后一个收敛分数除外,因它自然等于连分数本身). 这样一来,数$\frac{P_k}{Q_k}-w$和$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-w$符号应当是不同的,所以

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-w\right|+\left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-w\right|=\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right| \tag{3.15}$$

现在我们写

$$P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}=Q_k(P_{k+1}-Q_{k+1}w)-Q_{k+1}(P_k-Q_kw) \tag{3.16}$$

正好我们刚建立了右边括号中的两个差具有不同的符号. 因为相邻的收敛分数按量值来说是不同的,在(3.16) 中两个部分不等于零,所以

$$|P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}|=Q_k|P_{k+1}-Q_{k+1}w|+Q_{k+1}|P_k-Q_kw|>0$$

此外

$$Q_k|P_{k+1}-Q_{k+1}w|+Q_{k+1}|P_k-Q_kw|<2Q_{k+1}|P_k-Q_kw|\leqslant 2$$

因此,在(3.16) 的左边是整数,它的模是正数并且小于2,因此这个模等于1. 我们得到关系式

$$Q_k|P_{k+1}-Q_{k+1}w|+Q_{k+1}|P_k-Q_kw|=1 \tag{3.17}$$

对我们今后很有用. 我们再次提醒,在绝对值符号中的两个差具有不同符号(由k的奇偶性来决定),我们得到(3.8).

7. 在此,我们将埃尔米特的一个极为优美的证明,演示给读者.

定理 具有形如a^2+1的数的任何约数,可以表示为两个整数平方之和的形式.

证明 设d是a^2+1的约数. 展开分数$\frac{a}{d}$为连分数,对于它的收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$的分母,根据(3.14) 应当成立条件

$$1=Q_0<Q_1<\cdots<Q_n=d$$

所以存在这样的指标k,使得

$$Q_k\leqslant\sqrt{d}\leqslant Q_{k+1} \tag{3.18}$$

并且这两个不等式中至少有一个是严格的.因为,进一步,分数$\frac{a}{d}$位于收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$和$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$之间,则

$$\left|\frac{a}{d}-\frac{P_k}{Q_k}\right| \leqslant \left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}\right| = \left|\frac{P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}}{Q_{k+1}Q_k}\right| = \frac{1}{Q_{k+1}Q_k}$$

这样一来

$$\left|\frac{a}{d}-\frac{P_k}{Q_k}\right| = \frac{\varepsilon}{Q_{k+1}Q_k}$$

其中$\varepsilon \leqslant 1$.换句话说,顾及(3.18),我们有

$$|aQ_k-dP_k| = \frac{d}{Q_{k+1}}\varepsilon \leqslant \frac{d}{\sqrt{d}}\varepsilon = \sqrt{d}\varepsilon \leqslant \sqrt{d}$$

于是

$$(aQ_k-dP_k)^2 \leqslant d$$

此外,由(3.18)还可推出

$$Q_k^2 \leqslant d$$

同时两个最后的不等式仍旧至少有一个是严格的.这就是说,这两个不等式相加得出

$$(aQ_k-dP_k)^2+Q_k^2 < 2d \qquad (3.19)$$

打开括号,我们得到

$$(a^2+1)Q_k^2-2adQ_kP_k+d^2P_k^2 < 2d$$

这里左边的和是正整数,而三个加项的每一个都被d整除.因为这个和小于$2d$又被d整除,它应当等于d并且代替(3.19)可以写为

$$(aQ_k-dP_k)^2+Q_k^2 = d$$

需要表示约数d为两个平方和的形式就得到了.

8.所证的定理可以应用于带有奇指标的斐波那契数的约数.问题在于对偶数n公式(1.10)具有形式

$$u_n^2+1 = u_{n-1}u_{n+1}$$

于是斐波那契数u_{n-1}和u_{n+1}上有奇指标,作为它们的约数根据前述定理应该表为两个平方数和的形式.

由此,作为特殊情况,立刻推出§2第21款的结论,因为若奇数能表为两个平方和的形式,那么它应当具有$4t+1$的形式.

9.在第5款引理的证明过程中,我们实现了由等式(3.10)向等式(3.11)的推演.然而如果在(3.10)中将不完全商q_{k+1}替代为完全商w_{k+1},那么正如在第4款末尾已经说的,得到分数

$$w = \frac{P_kw_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kw_{k+1}+Q_{k-1}} \qquad (3.20)$$

现在可以对在第3款关于连分数中,数的展开式唯一性所做的讨论多少作点补充.

引理　如果在(3.20)中分数$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$是第$k-1$个收敛分数$\frac{P_k}{Q_k}$前边的一个收

敛分数，那么$\frac{P_k}{Q_k}$是w的收敛分数，而w_{k+1}是对应的完全商.

证明 展开分数$\frac{P_k}{Q_k}$为连分数

$$\frac{P_k}{Q_k}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_k}}}$$

根据条件我们有

$$\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-1}q_k+P_{k-2}}{Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}}$$

其中$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$是以$\frac{P_k}{Q_k}$为结尾的（倒数）第三个收敛分数.这里q_k用$q_k+\frac{1}{w_{k+1}}$来替代，对右边得到

$$\frac{P_{k-1}\left(q_k+\frac{1}{w_{k+1}}\right)+P_{k-2}}{Q_{k-1}\left(q_k+\frac{1}{w_{k+1}}\right)+Q_{k-2}}=\frac{P_kw_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kw_{k+1}+Q_{k-1}}$$

根据(3.20)等于w，因此等式

$$w=\frac{P_kw_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kw_{k+1}+Q_{k-1}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{w_{k+1}}}}} \tag{3.21}$$

所写的是数w作为连分数的展开式，同时$\frac{P_k}{Q_k}$是w的收敛分数，而w_{k+1}是对应的完全商.

引理得证.

10.现在我们对表示法中所有的不完全商都等于1的连分数应用第5款的引理.对这样的分数成立下面的定理.

定理 若一个连分数有n个不完全商，且每一个不完全商都等于1，则这个连分数等于$\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

证明 我们用α_{n-1}表示带有n个1为不完全商的连分数，显然，$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$\alpha_{n-1}$的顺次的收敛分数.设

$$\alpha_k=\frac{P_k}{Q_k}$$

因为

$$\alpha_0 = 1 = \frac{1}{1}$$

和

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

应当有 $P_1 = 1$ 和 $P_2 = 2$,进一步

$$P_{n+1} = P_n q_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$$

所以(见 §1 第6款)$P_n = u_{n+1}$.

类似的,$Q_1 = 1, Q_2 = 1$ 且

$$Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1}$$

于是 $Q_n = u_n$,这意味着

$$\alpha_{n-1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{3.22}$$

请读者将这个结果同公式(1.10)和(3.8)进行比较.

11.设我们给出两个连分数 w 和 w'

$$w = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}, \quad w' = q'_0 + \cfrac{1}{q'_1 + \cfrac{1}{q'_2 + \ddots}}$$

同时

$$q'_0 \geqslant q_0, q'_1 \geqslant q_1, q'_2 \geqslant q_2, \cdots \tag{3.23}$$

用

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots$$

来表示 w 的收敛分数.用

$$\frac{P'_0}{Q'_0}, \frac{P'_1}{Q'_1}, \frac{P'_2}{Q'_2}, \cdots$$

来表示 w' 的收敛分数.

由第4款引理的结果和(3.23)容易看出

$$P'_0 \geqslant P_0, P'_1 \geqslant P_1, P'_2 \geqslant P_2, \cdots$$

和

$$Q'_0 \geqslant Q_0, Q'_1 \geqslant Q_1, Q'_2 \geqslant Q_2, \cdots$$

所有不完全商的最小值显然是1,这意味着,若某一连分数的所有不完全商都是1,则它的收敛分数的分子和分母比其他任何连分数的收敛分数的分子和分母要增加得慢些.

12.我们现在估计这个增加是多么缓慢,显然,如果不考虑不完全商都是1的连分数,那么收敛分数的分子与分母都增加得最慢的是这样的连分数,它的不完全商中有一个是2而其余的不完全商是1,正如下面定理指出的,这种连分数也与斐波那契数有联系.

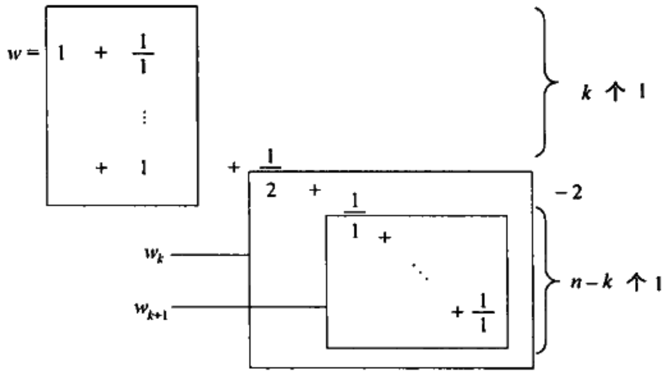
定理 连分数 w 的不完全商为

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_{k-1} = q_{k+1} = \cdots = q_n = 1$$

而 $q_k = 2(k \neq 0)$，则

$$w = \frac{u_{n+2} + u_{k+1}u_{n-k+1}}{u_{n+1} + u_k u_{n-k+1}}$$

证明 详细地写出连分数 w



上面的四角形周界环绕着的收敛分数通过$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$表示，而它前面一个收敛分数通过$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$表示．根据第 10 款我们有

$$P_{k-1} = u_k, Q_{k-1} = P_{k-2} = u_{k-1}, Q_{k-2} = u_{k-2} \tag{3.24}$$

此外，依同样的考虑，应当有

$$w_{k+1} = \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k}}$$

由此，根据对于完全商的公式(3.5)

$$w_k = 2 + \frac{1}{w_{k+1}} = 2 + \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+1}} = \frac{2u_{u-k+1} + u_{n-k}}{u_{n-k+1}} = \frac{u_{n-k+3}}{u_{n-k+1}} \tag{3.25}$$

在公式(3.20)包含的字母通过根据(3.24)和(3.25)的斐波那契数的表达式来代换，得到

$$w = \frac{u_{n+1}\dfrac{u_{n-k+3}}{u_{n-k+1}} + u_k}{u_k\dfrac{u_{n-k+3}}{u_{n-k+1}} + u_{k-1}} = \frac{u_{k+1}u_{n-k+3} + u_k u_{n-k+1}}{u_k u_{n-k+3} + u_{n-1}u_{n-k+1}}$$

这个分数的分子和分母根据公式(1.8)自然地变换给出

$$u_{k+1}u_{n-k+3} + u_k u_{n-k+1} = u_{k+1}u_{n-k+2} + u_{k+1}u_{n-k+1} + u_k u_{n-k+1} = u_{n+2} + u_{k+1}u_{n-k+1}$$

类似的

$$u_k u_{n-k+3} + u_{k-1}u_{n-k+1} = u_{n+1} + u_k u_{n-k+1}$$

这样一来

$$w = \frac{u_{n+2} + u_{k+1}u_{n-k+1}}{u_{n+1} + u_k u_{n-k+1}}$$

定理得证.

推论 如果连分数 w 所有不完全商不都是 1,这些不完全商个数不小于 n 且 $q_0 \neq 0$,那么,将 w 写成普通分数形式 $\frac{P}{Q}$ 时,有

$$P > u_{n+2}, Q > u_{n+1}$$

当然,第 5 款的引理在这里起着主要的作用,根据它,在"化"连分数为普通分数的过程中只得到既约分数.因此,由于它的既约性,所得分数的分子分母将不会产生减小的情形.

13. 由上款所证能得到下面的定理,它指出斐波那契数对于欧几里得算法的特殊地位.

定理 对数 a 与 b 施行欧几里得算法的步数,若 $b = u_n$,对某个 a 等于 $n-1$;若 $b < u_n$ 时,对所有的 a 都小于 $n-1$.

证明 定理第一部分的证明很简单,因为 a 只需取紧跟在 b 后面的斐波那契数,也就是 u_{n+1},则

$$\frac{a}{b} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_{n-1}$$

连分数 α_{n-1} 有 n 个不完全商,也就是对数 a 和 b 施行欧几里得算法的步数等于 $n-1$.

我们证明定理的第二部分,假设定理不成立,即所指出的欧几里得算法的步数不小于 $n-1$.将比 $\frac{a}{b}$ 展开为连分数 w.显然 w 将有小于 n 个不完全商(也就是小于 1 个).

所证的定理意味着,相邻的一对斐波那契数进行欧几里得算法正好达到"最大的长度".

14. 表达式

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n} + \cdots}} \tag{3.26}$$

称为无限连分数,上面各款的定义和结果可以很自然地推广到无限连分数中来.

设

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \cdots, \frac{P_n}{Q_n}, \cdots \tag{3.27}$$

是分数(3.26)的收敛分数序列(显然是无限的).我们证明,这个序列存在极限.

为此,我们分别考察收敛分数的偶指标序列和奇指标序列

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \cdots \tag{3.28}$$

和

$$\frac{P_1}{Q_1},\frac{P_3}{Q_3},\cdots,\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\cdots \tag{3.29}$$

根据(3.13)和(3.14)

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}+\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=$$

$$\frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n-1}}+\frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}>0$$

这意味着,序列(3.28)是递增的,同样地由

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}-\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}=\frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}}-\frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}}<0$$

推出,序列(3.29)是递减的.

序列(3.29)中所有的项都大于序列(3.28)中所有的项.事实上,我们来讨论数$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$和$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$.

取一个奇数 k,大于 $2n$ 也大于 $2m+1$.由(3.13)得出

$$\frac{P_k}{Q_k}>\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \tag{3.30}$$

而由递增序列(3.28)和递减序列(3.29)

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}>\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{3.31}$$

$$\frac{P_k}{Q_k}<\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \tag{3.32}$$

比较表达式(3.30),(3.31)和(3.32),得到

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}<\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

也就是,任何偶指标的收敛分数永远小于任何奇指标的收敛分数.

但根据(3.13)和(3.14)

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|=\frac{1}{Q_{n+1}Q_n}<\frac{1}{n^2}$$

所以当 n 增大时,第 $n+1$ 个与第 n 个收敛分数之差的绝对值趋于零.

由全部指出的事实能够推断,序列(3.28)和(3.29)具有同一个极限,它显然也是(3.27)的极限,这个极限叫做无限连分数(3.26)的值.

在第2款里我们建立了有理数的连分数展开的唯一性.因为进行这个讨论时没凭借任何所考察连分数的有限性,从而我们已经证明,任意实数(不仅只是有理数)可以是不多于一个连分数的值.

因为有理数永远能展开为有限连分数,由刚才的证明得出,它不能展开为无限连分数.

因此,无限连分数的值必定是无理数.

将无理数展开为连分数的理论,赋予数论上内容深刻而结果有趣的一个分支.在这里,我们将不再深人研讨这个理论,而只用一个与斐波那契数有联系的例题作为结束.

15.求无限连分数

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}} \tag{3.33}$$

的值.

根据上面的证明,这个值是$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{n-1}$,其中$\alpha_{n-1}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.我们计算这个极限.

正如在 §1第20款已经建立的,u_n 是最接近$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$的整数,就是说

$$u_n=\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n$$

其中$|\theta_n|<\frac{1}{2}$.无论对任何的 n 都成立.

因此,由于第14款所证

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}+\theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}$$

但$\theta_{n+1}\sqrt{5}$是有界量(它的绝对值小于2),而当 n 趋于无限时,α^n 无限增大(因为$\alpha>1$),这就意味着

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}=0$$

根据同样的理由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}=0$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

连分数(3.33)的值可以不使用比内公式和极限过程来计算.(在已知意义下我们在第2款进行的归纳论证就足够了,显然,它不只服务于有限连分数,而且也服务于无限连分数的极限)

为此分数(3.33)表为形式 $1+\frac{1}{x}$.

显然,这里 x 的表达式本身是连分数(3.33),于是

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

由此

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{3.34}$$

且

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

因为(3.33)的分数值是非负数,它应当等于方程(3.34)的正根,也就是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,而这就是 α.

由所证得出,相邻的两个斐波那契数的比随它的指标的增加而趋于 α.这可用来对数 α 进行近似计算.(比较在 §1 第 20 款用公式(1.35)对 u_n 的计算)由这种计算所得的误差,即使我们所取的斐波那契数不大,也是很小.例如(精确到第五个数字)

$$\frac{u_{10}}{u_9} = \frac{55}{34} = 1.617\,6$$

而 $\alpha = 1.618\,0$.我们看到误差小于0.1%.

顺便说说,关于利用一个无理数的连分数展开式的收敛分数近似计算这个无理数,数 α 是误差最坏的情况.所有其他的数用自己的收敛分数来刻画,就某种意义来说,都比对 α 来得精确.本书中对此问题将不再作详细的讨论.

16.因为连分数的值是它的收敛分数序列的极限,收敛分数应当与连分数本身的值接近,并且可以讨论接近的速度.在本质上说,我们研究的是用分母不很大的有理分数表示实数的精确程度.

实数用它的收敛分数来逼近,在下面论断的意义下是最精确的.

勒让德定理 设 w 是任意实数,而 $\frac{p}{q}$ 是某个既约分数,在 $\frac{p}{q}$ 的展开式中倒数第二个收敛分数通过 $\frac{p'}{q'}$ 来表示,则为使得 $\frac{p}{q}$ 是 w 的收敛分数的必要且充分的条件是成立不等式

$$\left|\frac{p}{q} - w\right| < \frac{1}{q(q+q')} \tag{3.35}$$

证明 必要性.设

$$\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}, \frac{p'}{q'} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

分别是对 w 的第 n 个和第 $n-1$ 个收敛分数，那么引进讨论第 $n+1$ 个完全商 w_{n+1}（它大于 1），根据(3.18) 和(3.8)，有

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-w\right| = \left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_n w_{n+1}-P_{n-1}}{Q_n w_{n+1}-Q_{n-1}}\right| = \left|\frac{(P_nQ_n-P_nQ_n)w_{n+1}+(-1)^n}{Q_n(Q_n w_{n+1}+Q_{n-1})}\right| = \frac{1}{Q_n(Q_n w_{n+1}+Q_{n-1})} < \frac{1}{q(q+q')} \tag{3.36}$$

充分性. 设(3.30) 成立，我们选取数 θ，使

$$w=\frac{p\theta+p'}{q\theta+q'}$$

则根据(3.17) 和(3.7)，我们得到

$$\left|\frac{p}{q}-w\right| = \left|\frac{p}{q}-\frac{p\theta+p'}{q\theta+q'}\right| = \left|\frac{pq\theta-pq\theta+pq'-p'q}{q(q\theta+q')}\right| = \frac{1}{q(q\theta+q')} < \frac{1}{q(q+q')}$$

这个 $\theta>1$. 这样就出现第 5 款引理的条件，根据这个引理，$\frac{p}{q}$ 是 w 的收敛分数，而 θ 是对应的完全商.

17. 在前一款的表示中，$q'<q$. 所以，如果

$$\left|\frac{p}{q}-w\right| < \frac{1}{2q} \tag{3.37}$$

则 $\frac{p}{q}$ 是 w 的收敛分数. 显然，这个条件对 $\frac{p}{q}$ 是收敛分数来说不是必要的：并不是数 w 的所有收敛分数都具有性质(3.37). 但是有"足够多"的 w 的收敛分数，它们满足不等式(3.37). 在下面的定理中有这个内容的精确的叙述.

18. **华林定理** 如果 w 是任意实数，那么，由 w 的带有相邻指标的两个收敛分数中至少有一个 $\frac{p}{q}$ 满足不等式

$$\left|\frac{p}{q}-w\right| < \frac{1}{2q^2}$$

证明 我们取两个相邻的收敛分数 $\frac{P_n}{Q_n}$ 与 $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$，并且估计和

$$s=\left|\frac{P_n}{Q_n}-w\right|+\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-w\right| \tag{3.38}$$

的值. 根据第 14 款的论证，我们注意到，在绝对值符号下的两个数应是有不同

符号的.记住,两个不同数的乘积小于它们平方和的一半,于是得到

$$s = \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} < \frac{1}{2Q_n^2} + \frac{1}{2Q_{n+1}^2}$$

这意味着由组成 s 的加项中至少有一个应当对应(3.38)右边的小的加项,也就是

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - w\right| < \frac{1}{2Q_n^2}$$

或者

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - w\right| < \frac{1}{2Q_{n+1}^2}$$

这就是需要证明的.

19. 如果以更强的不等式代替不等式(3.32),在不等式中增加 q^2 的系数,那么,对我们来说得到满足它的收敛分数的机会要减少,然而只要适中地增加这个系数,这种可能性还是颇多的.

波莱尔定理 如果 w 是任意实数,那么它的任意三个顺次的收敛分数中至少有一个 $\frac{p}{q}$ 满足条件

$$\left|\frac{p}{q} - w\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \tag{3.39}$$

证明 我们取数 w 的三个顺序的收敛分数

$$\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} \tag{3.40}$$

正如在(3.36)中已经说明的

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - w\right| = \frac{1}{Q_n(Q_nw_{n+1} + Q_{n-1})} = \frac{1}{Q_n^2\left(w_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)} \tag{3.41}$$

所以,为了方便起见通过 c 表示$\sqrt{5}$,我们考虑(3.41),可以改写(3.39)为

$$\frac{1}{Q_n^2\left(w_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)} < \frac{1}{cQ_n^2}$$

或者

$$w_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} > c$$

下面我们用反证法来证明定理.(3.40)中的任一个收敛分数都不遵守不等式(3.39),这意味着

$$w_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \leqslant c \tag{3.42}$$

$$w_{n+2} + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqslant c \tag{3.43}$$

$$w_{n+3} + \frac{Q_{n+1}}{Q_{n+2}} \leqslant c \tag{3.44}$$

然而

$$w_{n+1} = q_n + \frac{1}{w_{n+2}}$$

于是由(3.42)得出

$$q_n + \frac{1}{w_{n+2}} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \leqslant c$$

或者

$$\frac{1}{w_{n+2}} + \frac{Q_n q_n + Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{w_{n+2}} + \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \leqslant c \tag{3.45}$$

这个不等式与(3.43)逐项相乘得

$$2 + w_{n+2}\frac{Q_{n+1}}{Q_n} + \frac{Q_n}{w_{n+2}Q_{n+1}} \leqslant c^2$$

或者,设

$$w_{n+2}\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = t$$

注意到 $c = \sqrt{5}$,有

$$t + \frac{1}{t} \leqslant 3$$

也就是,t 的值是正数,它应有

$$t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$$

由此

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

我们发现,t 的上界呈现出等于 α^2. 所以很清楚,如果 $w_{n+2} > \alpha$,那么

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} < \alpha \tag{3.46}$$

然而,如果 $w_{n+2} > \alpha$,那么由(3.43)推出

$$\alpha + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} < c$$

即

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} < \sqrt{5}$$

于是

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

和

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} > \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

与(3.46) 矛盾. 这意味着 $w_{n+2} \leqslant \alpha$. 但因为作为量 w_{n+2} 和$\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ 包含在不等式(3.43) 和(3.44) 中是平等的,类似的讨论给出

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \leqslant \alpha \tag{3.47}$$

根据同样的考虑,由(3.45) 和(3.44) 推出

$$w_{n+3} \leqslant \alpha, \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} \leqslant \alpha \tag{3.48}$$

进一步我们注意

$$w_{n+2} = q_{n+2} + \frac{1}{w_{n+3}}$$

也就是

$$q_{n+2} = w_{n+2} - \frac{1}{w_{n+3}} \leqslant \alpha$$

因为 q_{n+2} 是正整数,由此推出 $q_{n+2} = 1$. 但当

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$$

且由(3.48) 推出

$$\frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} = 1 + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqslant \alpha$$

由此

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqslant \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha$$

它同(3.47) 一起,给出

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \alpha$$

然而这是不可能的,因为分数$\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ 是有理数,而数 α 是无理数.

20. 在华林和波莱尔定理中建立的事实,可以产生进一步增加在(3.37) 和(3.38) 中 q^2 的系数的设想,由更长的相邻的收敛分数系列中只是难于选取必须的收敛分数. 然而,这个想法是靠不住的. 实际上对 q^2 的系数增加到$\sqrt{5}$ 以外,

全部情况的变化是极为剧烈的.

进一步对这个系数问题的分析导致提出新的关于用有理数逼近实数的精确性的问题.也就是说,我们对这样的可能性感兴趣:对实数 w,对固定的系数 c,找到无穷多的这样的分数$\frac{p}{q}$,使得

$$\left|\frac{p}{q}-w\right|<\frac{1}{cq^2} \qquad (3.49)$$

我们发现与此联系,根据勒让德定理,当 $c\geqslant 2$时所有这样的分数$\frac{p}{q}$应是w的收敛分数.所以当 $c\geqslant 2$ 时我们提出的问题同连分数显现出直接的联系.

进一步,由华林定理推出,对任意的实数 w,在对 w 的收敛分数$\frac{p}{q}$中,存在无穷多个,使是不等式(3.49) 当 $c=2$ 时成立.波莱尔定理可以加强这个结果,由它推出,(也对任意 w) 存在无限多的(收敛) 分数,当 $c=\sqrt{5}$ 时满足不等式(3.49),正如下面的定理指出的,这个结论的进一步加强,就不再成立了.

21.胡尔维茨定理　如果 $c>\sqrt{5}$,则存在数 w,对于它不等式

$$\left|\frac{p}{q}-w\right|<\frac{1}{cq^2}$$

只对有限个数的既约分数$\frac{p}{q}$是成立的.

(注意,根据勒让德定理,所有这样的分数$\frac{p}{q}$应当是数 w 的收敛分数).

证明　作为数 w 可以取$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,设 $c>\sqrt{5}$ 和$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|<\frac{1}{cq^2}<\frac{1}{2q^2}$,则根据在第 14 款证明的,分数$\frac{p}{q}$应是$\alpha$ 的收敛分数.我们设$\frac{p}{q}=\frac{P_n}{Q_n}$,重新写(3.41) 为

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-w\right|=\frac{1}{Q_n^2\left(w_{n+1}+\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)}$$

此外,根据(3.22) 在我们的情况下 $w_{n+1}=\alpha$,而 $Q=u_n$.同时(根据 15 款的表示)

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_n}=\frac{1}{\alpha_{n-1}}$$

其中$\frac{1}{\alpha_{n-1}}$与$\frac{1}{\alpha}$相差某个ε_n,它随 n 的增加可以任意的小,所以有

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-w\right|=\frac{1}{Q_n^2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}+\varepsilon_n\right)}=\frac{1}{Q_n^2(\sqrt{5}+\varepsilon_n)}$$

这样一来，如果取 $c > \sqrt{5}$，那么对足够大的 n 将有 $c > \sqrt{5} + \varepsilon_n$，于是

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - w\right| = \frac{1}{Q_n^2(\sqrt{5} + \varepsilon_n)} > \frac{1}{cQ_n^2}$$

这意味着，在 $c > \sqrt{5}$ 的条件下，当 $w = \alpha$ 时，不等式(3.49) 只对有限个数的带有不很大的指标的收敛分数成立.

22. 胡尔维茨定理断言存在数 w，它对任意的 $c > \sqrt{5}$，不等式(3.49) 只对有限个(收敛于 w 的!) 分数 $\frac{p}{q}$ 成立. 这些数中的一个是我们已知的数 α. 自然地下一步是阐明除 α 以外怎样的数也具有这些性质的问题. 我们写出所有这样数的类.

为此，我们称实数 w' 等价于数 w，如果可以指出这样的(显然，依赖于 w' 的) 四个整数 a, b, c, d，使得

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d} \tag{3.50}$$

$$ad - bc = \pm 1 \tag{3.51}$$

不难确信，每个数等价于自身：对此，只要取 $a = 1$ 且 $b = c = d = 0$ 就足够了.

进一步，如果 w' 等价于 w，那么 w 等价于 w'. 实际上，由(3.50) 推出

$$w = \frac{-dw' + b}{cw' - a}$$

而等式(3.51) 自己推演为

$$(-d)(-a) - bc = \pm 1$$

最后，如果 w' 等价于 w，w'' 等价于 w'，即对(3.50) 和(3.51) 补充等式

$$w'' = \frac{a'w' + b'}{c'w' + d'}$$

$$a'd' - b'c' = \pm 1$$

那么 w'' 等价于 w. 为确认这个事实，我们在表达式 w'' 中，在 w' 的位置代以定义它的分数(3.50)

$$w'' = \frac{a'\dfrac{aw + b}{cw + d} + b'}{c'\dfrac{aw + b}{cw + d} + d'} =$$

$$\frac{a'(aw + b) + b'(cw + d)}{c'(aw + b) + d'(cw + d)} = \frac{(a'a + b'c)w + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)w + (c'b + d'd)}$$

这里

$$\begin{aligned}&(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = \\&a'ac'b + a'ad'd + b'cc'b + b'cd'd - a'bc'a - b'dd'c - \\&a'bd'c - b'dc'a = a'ad'd + b'cc'b - a'bd'c - b'dc'a = \\&(ad - bc)(a'd' - b'c') = \pm 1\end{aligned}$$

这给出了类似于(3.51) 的公式.

等价数发生的来源之一是斐波那契数. 例如，根据 §1第9款证明的，任意实数 w 等价于分数 $\frac{u_{n-1}w + u_n}{u_nw + u_{n-1}}$ 对任意自然数 n 都成立.

23.刚才定义的等价关系(正像任意另外的具有三个所建立性质的关系一样)划分全体实数集合为这样的没有公共数的类,每一类的所有数是彼此等价的,而不同类的数不等价.这些数中有与我们的 α 等价的所有数的类.

我们作一个逻辑术语的注解."等价"一词通常在数学中用于表示这些或另外一些对象之间的任何这样的关系,它具有前面列举的三条性质(关系的这些性质具有专门的称谓,它们分别叫做关系的反身性、对称性和传递性),所以能被叫做等价关系的在关系的内容上可以彼此极不一样.例如,整数对具体模 m 的同余关系是等价关系(见 §1第14款).用关系式(3.50)和(3.51)刻画的表示连分数的等价性的意义,是真正具有丰富内容的,将在下款中说明.

24.实数的等价性和它们连分数展开式之间的联系由下面的引理来刻画.

引理 对这样的实数 w 和 w' 是等价的,必须且只需,当它们展开为连分数后它们的某个完全商相同,也就是存在这样的(不必一样)指标 n 和 n',使得 $w_n = w'_{n'}$.

证明 充分性.设 w_k 和 w_{k+1} 是某个连分数 w 的两个相邻的完全商.对它们成立关系式(3.3),据此

$$w_k = \frac{q_k w_{k+1} + 1}{1 \cdot w_{k+1} + 0}$$

因为这里 $q_k \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$,数 w_k 和 w_{k+1} 是等价的.

由此,同一个数的任意相邻的完全商彼此等价,推出,每个实数与自己的任意完全商等价.

因此,如两个数具有相同(这里等价的平凡形式)的完全商,它们应当本身是等价的.

必要性.证明本质上是复杂的.假设数 w 和 w' 是等价的,也就是对某些 a,b,c 和 d 保持关系式(3.50)和(3.51),我们证明,它们展开为连分数的某个完全商应当相等.

首先建立数 w 和 w' 的收敛分数之间的某种一般联系.设 $\frac{P'}{Q'}$ 是 w' 的收敛分数,则

$$Q'w' - P' = Q'\frac{aw+b}{cw+d} - P' = \frac{(Q'a - P'c)w + (Q'b - P'd)}{cw+d}$$

或者,假定

$$Q'a - P'c = Q,\ -Q'b + P'd = P \tag{3.52}$$

我们写出

$$Q'w' - P' = \frac{Qw - P}{cw+d} \tag{3.53}$$

等式(3.52)组成关于 Q' 和 P' 的方程组,解它,我们得到

$$\begin{aligned} \pm Q' &= Qd + Pc \\ \pm P' &= Qb + Pa \end{aligned} \tag{3.54}$$

在解这个方程组的过程中,我们完成了唯一的除法运算,是除以数 $ad - bc = \pm 1$,因而不为0,所以方程组(3.54)有解,同时是唯一的.

改写(3.52)的第一个等式为

$$Q = Q'(a - cw) + c(Q'w - P') \tag{3.55}$$

不失一般性,我们可以假设 $a - cw > 0$(因为在相反情况下,我们改变所有的数 a,b,c,d 为相反的符号),则由(3.55)推出,当

$$|Q'w-P'|<\frac{a-cw}{|c|} \tag{3.56}$$

时，数 Q' 和 Q 的符号应是一致的，顺便注意，在(3.56)的右边与 P' 和 Q' 无关.

在这些预先的讨论之后，取数 w' 的两个相邻的收敛分数：$\frac{P'_n}{Q'_n}$ 和 $\frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}}$，根据它们构作(类似于由 $\frac{P'}{Q'}$ 向 $\frac{P}{Q}$ 的推演)分数 $\frac{P_n}{Q_n}$ 和 $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. 我们证明，对充分大的 n 值，这些分数是数 w 的相邻的收敛分数.

首先发现，数对 P'_n 和 Q'_n，而 P'_{n+1} 和 Q'_{n+1} 在充分大的 n 满足的不等式类似于不等式(3.56). 由此推出 $Q'_n>0$ 和 $Q'_{n+1}>0$.

此外，在(3.56)中 P' 和 Q' 的作用也可以表现在对应的差值 $P'_{n+1}-P'_n$ 和 $Q'_{n+1}-Q'_n$ 中，由此推出，$Q'_{n+1}-Q'_n>0$，所以

$$0<Q_n<Q_{n+1} \tag{3.57}$$

进一步，由(3.53)得出

$$\begin{aligned}|Q_nw-P_n|=|cw+d||Q'_nw'-P'_n|>\\ |cw+d||Q'_{n+1}w'-P'_{n+1}|=\\ |Q_{n+1}w-P_{n+1}|\end{aligned} \tag{3.58}$$

现在我们假设，求到某个既约分数 $\frac{R}{S}$，它的分母比 Q_{n+1} 小，它趋近 w 不比 $\frac{P_n}{Q_n}$ 坏，也就是对它有

$$0<S<Q_{n+1},\ |Sw-R|\leqslant|Q_nw-P_n| \tag{3.59}$$

我们按照分数 $\frac{R}{S}$ 确定符号于公式(3.54)的分数 $\frac{R'}{S'}$. 正如导出(3.58)那样，我们由(3.59)可以得到

$$|S'w-R'|\leqslant|Q'_nw-P'_n| \tag{3.60}$$

这就是说 P' 和 Q' 在(3.56)中的作用，对充分大的 n 可以表现为一对差值 $P'_{n+1}-R'$ 和 $Q'_{n+1}-S'$ 上. 在这种情况下，与推导(3.57)类似，我们得到

$$0<S'<Q'_{n+1} \tag{3.61}$$

由最后两个不等式根据第16款的勒让德定理的必要部分得出，$\frac{R'}{S'}$ 是 w' 的收敛分数，同时等于 $\frac{P'_n}{Q'_n}$，但分数 $\frac{R}{S}$ 实际上是分数 $\frac{P_n}{Q_n}$，根据(3.57)和(3.58)分数 $\frac{P_n}{Q_n}$ 和 $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ 成为 w 的两个相邻的收敛分数. 因此，对任意充分大的 n(我们说比某个 N 要大)分数 $\frac{P_n}{Q_n}$ 是 w 的收敛分数.

现在设 $q_0,q_1,\cdots$ 是数 w' 展开为连分数的不完全商，则对 Q_{n+1} 和 P_{n+1} 运用(3.52)，我们有

$$\begin{aligned}Q_{n+1}=aQ'_{n+1}-cP'_{n+1}=a(Q'_nq_{n+1}+Q'_{n-1})-c(P'_nq_{n+1}+P'_{n-1})=\\ q_{n+1}(aQ'_n-cP'_n)+(aQ'_{n-1}-cP'_{n-1})=q_{n+1}Q_n+Q_{n-1}\end{aligned}$$

类似的

$$P_{n+1}=-bQ'_{n+1}+dP'_{n+1}=q_{n+1}P_n+P_{n-1}$$

这样一来，从指标 N 开始，数 q_0 按公式(3.6)和(3.7)联系着 w 的收敛分数的分子和分

母. 显然,可以只给出 w 展开式中的不完全商. 这意味着,在 w 的展开式中,从指标 N 开始,所有不完全商应当同 w' 的不完全商相同,也就是 w 和 w' 发现了共同的完全商.

引理得证.

运用我们感兴趣的数 α 证明引理获得下面的形式:无论怎样的数 α' 形如$\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$,其中 $ad-bc=\pm 1$. 它的完全商应当是等于 α. 也就是,从某个地方开始,它们的不完全商都是 1.

25. 判明关于等价的实数导致它与不等式(3.49)是一致的,也就是说,对给定的实数 w,我们通过 $c(w)$ 表示全部这样的数中最小的. 在任意 $c>c(w)$ 的情况下,不等式(3.49)真的只对有限个数的分数$\frac{p}{q}$ 成立. 根据波莱尔定理,对任意 w 应当有 $c(w)\geqslant\sqrt{5}$,而根据胡尔维茨定理 $c(w)$ 不能超过$\sqrt{5}$,这就是说 $c(w)=\sqrt{5}$.

我们建立下面的辅助的,然而是特别重要的事实.

定理 如果数 w 和 w' 等价,那么 $c(w)=c(w')$.

证明 为了具体起见,我们认为等价的两个数 w 和 w' 用带有某些具体整数 a,b,c 和 d 的关系式(3.50)和(3.51)联系着.

假设,对给定的 σ 存在无限多这样的分数$\frac{p}{q}$,使得

$$\left|\frac{p}{q}-w\right|<\frac{1}{\sigma q^2}$$

对每个这样的分数,取

$$\begin{aligned} p' &= pd-qb \\ q' &= -pc+qa \end{aligned} \tag{3.62}$$

则进行类似于由(3.52)推导(3.53)的计算,得到

$$p'-q'w'=\pm\frac{qw-p}{a-cw}$$

其中符号 + 或 − 根据(3.51),也就是 $q'=q(a-cw)+c(qw-p)$ 来决定.

现在,我们有

$$\begin{aligned} q'\,|\,p'-q'w\,| &= |\,q(a-cw)+c(qw-p)\,|\left|\frac{qw-p}{a-cw}\right| = \\ &\left|q(qw-p)+\frac{c(qw-p)^2}{a-cw}\right| \leqslant \\ &q\,|\,qw-p\,|+\frac{|\,c\,|\,(qw-p)^2}{|\,a-cw\,|} < \\ &\frac{1}{\sigma}+\frac{|\,c\,|}{|\,a-cw\,|}\,\frac{1}{\sigma^2q^2}<\frac{1}{\sigma'} \end{aligned}$$

对无论怎样的 $\sigma'<\sigma$ 并且足够大的 q 都成立.

最后一串不等式显示,存在无限多个由等式(3.62)确定的分数$\frac{p'}{q'}$,对于它,当 $\sigma'<\sigma$ 时

$$\left|\frac{p'}{q'}-w\right|<\frac{1}{\sigma'q'^2}$$

由此推得 $c(w')\leqslant c(w)$.

因为等价关系是对称的,还应当有 $c(w)\leqslant c(w')$,这就得到需要的结论.

定理得证.

特别的，等价于 α 的所有实数，是在胡尔维茨定理中断言存在的那些实数.

26. 我们剩下说明，在胡尔维茨定理中说到的数都是与数 α 等价的吗?这个问题的回答显得稍有意外，而且甚至是“双重的意外”. 由下面定理可以见到.

定理 如果数 w 与数 α 不等价，那么在 w 的任意三个相邻的收敛分数中，存在分数 $\frac{p}{q}$，使得

$$\left|\frac{p}{q}-w\right|<\frac{1}{\sqrt{8}q^2}$$

第一个意外，在这个定理的表述中可以认为系数 q^2 从 $\sqrt{5}$ 到 $\sqrt{8}$ 的改变是跳跃的，而第二个意外——转向在波莱尔定理的公式中提出问题：发现充分靠近 w 的收敛分数的无穷序列不是简单的，但所有收敛分数中这样的分数序列甚至“很稠密”(至少在三个相邻的分数中间就有一个!).

全部做完准备工作之后，这个定理证明没有特别的困难.

我们取任意的实数 w，它有收敛分数 $\frac{P_n}{Q_n}$ 并且为了简化表示法，我们假设

$$Q_n^2\left|\frac{P_n}{Q_n}-w\right| = Q_n\mid P_n-Q_nw\mid = A_n \tag{3.63}$$

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_n}=\lambda_n,\ \frac{Q_{n+1}}{Q_n}=\mu_n$$

显然，数 λ_n 和 μ_n 是有理数. 这里我们注意，在我们的表示中(见(3.7))

$$\mu_n-\lambda_n=\frac{Q_{n+1}-Q_{n-1}}{Q_n}=q_{n+1} \tag{3.64}$$

现在注意公式(3.17)

$$Q_n\mid P_{n+1}-Q_{n+1}w\mid+Q_{n+1}\mid P_n-Q_nw\mid=1$$

对它简单地变换得出

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}}A_{n+1}+\frac{Q_{n+1}}{Q_n}A_n=1$$

或者

$$\frac{A_{n+1}}{\mu_n}+\mu_nA_n=1$$

由此

$$\mu_n^2A_n-\mu_n+A_{n+1}=0 \tag{3.65}$$

类似地

$$\lambda_n^2A_n-\lambda_n+A_{n-1}=0 \tag{3.66}$$

由(3.65)减去(3.66)得

$$A_n(\mu_n^2-\lambda_n^2)-(\mu_n-\lambda_n)+A_{n+1}-A_{n-1}=0$$

或者，顾及(3.64)

$$A_n(\mu_n+\lambda_n)q_n=q_n-A_{n+1}+A_{n-1} \tag{3.67}$$

这个等式两边平方，得到

$$A_n^2(\mu_n^2+2\mu_n\lambda_n+\lambda_n^2)q_n^2=(q_n-A_{n+1}+A_{n-1})^2 \tag{3.68}$$

(3.64) 乘以 A_nq_n，也将它平方

$$A_n^2(\mu_n^2-2\mu_n\lambda_n+\lambda_n^2)q_n^2=q_n^4A_n^2$$

并且最后两个等式相加

$$2A_n^2(\mu_n^2+\lambda_n^2)q_n^2=q_n^4A_n^2+(q_n-A_{n+1}-A_{n-1})^2$$

进一步，(3.65) 和(3.66) 相加可得

$$A_n(\mu_n^2+\lambda_n^2)=(\mu_n+\lambda_n)-(A_{n-1}+A_{n+1})$$

所以(最后等式乘以 $2A_nq_n^2$)

$$2A_nq_n^2((\mu_n+\lambda_n)-(A_{n-1}+A_{n+1}))=q_n^4A_n^2+(q_n-A_{n+1}+A_{n-1})^2$$

或者，利用(3.67)

$$2q_n(q_n-A_{n+1}-A_{n-1})-2A_nq_n^2(A_{n-1}+A_{n+1})=$$
$$q_n^4A_n^2+(q_n-A_{n+1}+A_{n-1})^2$$

打开括号，重新安排各项，得到

$$q_n^4A_n^2+q_n^2(2A_nA_{n-1}+2A_nA_{n+1}-1)+(A_{n-1}+A_{n+1})^2=0$$

或者

$$q_n^2A_n^2+2(A_nA_{n-1}+A_nA_{n+1})=1-\frac{1}{q_n^2}(A_{n-1}+A_{n+1})^2\leqslant 1 \tag{3.69}$$

我们发现，这里左边是正数.

现在设 A 是三个数 A_{n-1}，A_n 和 A_{n+1} 中的最小者.那么用 A 代换这三个数中每一个，最后等式左边不增加，并且得到

$$(q_n^2+4)A^2\leqslant 1 \tag{3.70}$$

但由于 $q_n\geqslant 1$，这里应当有 $q_n^2+4\geqslant 5$，这意味着，为了保持不等式(3.70) 有两种可能：

(1) $A<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) $q_n=1, A=A_{n-1}=A_n=A_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

在第二种情况下关系式(3.65) 给出

$$\mu_n^2\frac{1}{\sqrt{5}}-\mu_n+\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$

也就是

$$\mu_n^2-\sqrt{5}\mu_n+1=0$$

由此

$$\mu_n=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$$

这样一来，数 μ_n 成为无理数.然而，这与公式(3.63) 以后作的结论矛盾.也就是所指出的第二种可能性不能成立，并且应当有 $A<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

现在转向对等式(3.63)，得到由对 w 的三个顺次的收敛分数中至少有一个$\frac{P}{Q}$，应当满足不等式

$$\left|\frac{P}{Q}-w\right|<\frac{1}{\sqrt{5}Q^2}$$

我们得到了波莱尔定理的结论. 然而,现在我们能够进一步发现,如果 $q_n \geqslant 2$,则根据(3.70)应当有 $A<\frac{1}{\sqrt{8}}$.

最后一句话可以解密为下面的形式,如果数 w 不与数 α 等价,并且因而有在无限位置集合有着不等于0的不完全商,那么在每个这样的位置上由三个顺次的收敛分数中至少有一个 $\frac{P}{Q}$ 满足不等式

$$\left|\frac{P}{Q}-w\right|<\frac{1}{\sqrt{8}Q^2} \tag{3.71}$$

定理得证.

27. 用例子实现不等式(3.71)可以得到数 $1+\sqrt{2}$,它的所有不完全商都是2

$$1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}$$

对于所有等价于这个数的数,根据第24款的引理也可以指出无限个收敛分数,它们遵守(3.71).

这里出现的所有形势显现出重复. 也就是,如果丢弃与 α 等价的数和等价于 $1+\sqrt{2}$ 的所有数(或者,同样等价于 $\sqrt{2}$),那么全部剩下的数可能比用自己的收敛分数刻画还更精确. 对于它们系数 $c(w)$ 将不比 $\frac{1}{5}\sqrt{211}$ 小. 这些讨论可以进一步拓展,但鉴于本书读者对象的范围,我们只能就此收笔了.

§4 斐波那契数与几何

1. 我们分单位长的线段 AB(图 2) 为两个部分，使得其中较大的部分是较小部分与整个线段的比例中项.

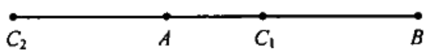


图 2

为此，我们用 x 表示线段中较大部分的长度. 显然，此时它的较小部分的长将等于 $1-x$，由问题的条件得比例式

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \tag{4.1}$$

由此

$$x^2=1-x \tag{4.2}$$

(4.2) 的正根是$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，于是在(4.1) 中的比例式的比值等于

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$$

这样的分割(点 C_1) 称为中外比分割. 它也常被称为黄金分割.

如果取方程(4.2) 的负根，则分点 C_2 出现在线段 AB 外边(这种类型的分割在几何中叫做外分)，这正如图 2 中所见. 容易证明，这里我们遇到的黄金分割是

$$\frac{C_2B}{AB}=\frac{AB}{C_2A}=\alpha$$

2. 线段黄金分割点的实际作图不存在困难.

设 $AB = 1$,由点 A 作 AB 的垂线并在其上取点 E,使得 $AE = \frac{1}{2}$(图 3),则

$$EB = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

以点 E 为圆心过点 A 画弧交 EB 于点 D,得到

$$BD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

最后以点 B 为圆心过 D 画弧,找到未知点 C_1. 外分点 C_2 由条件 $AC_2 = BC_1$ 可以找到.

3. 黄金分割在几何上经常遇到. 例如,对于半圆中的内接正方形(图 4),点 C 是线段 AB 的黄金分割点.

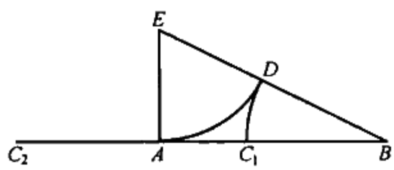


图 3

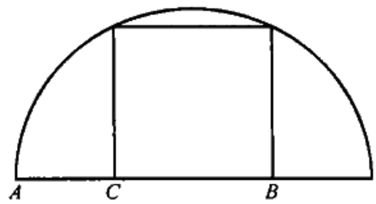


图 4

半径为 R 的圆的内接正十边形(图 5) 的边 a_{10},正如大家所知道的,等于 $2R\sin\frac{360°}{2 \cdot 10}$,也就是 $2R\sin 18°$.

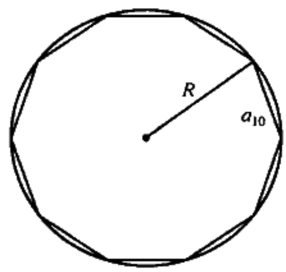


图 5

我们来计算 $\sin 18°$. 根据已知的三角公式

$$\sin 36° = 2\sin 18° \cos 18°$$
$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$$

由此得

$$\sin 72° = 4\sin 18° \cos 18° (1 - 2\sin^2 18°) \qquad (4.3)$$

因为 $\sin 72° = \cos 18° \neq 0$,由(4.3) 推得

$$1 = 4\sin 18°(1 - 2\sin^2 18°)$$

所以 $\sin 18°$ 是方程

$$1 = 4x(1 - 2x^2)$$

即

$$8x^3 - 4x + 1 = 0$$

的一个根. 把最后一个方程左边分解因式,得到

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

由此

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

因为 sin 18° 是不等于$\frac{1}{2}$ 的正数,有

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2\alpha}$$

进一步发现

$$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\frac{1}{4\alpha^2}=1-\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{2\alpha^2-1}{2\alpha^2}=$$

$$\frac{2+2\alpha-1}{2\alpha^2}=\frac{2\alpha+1}{2\alpha^2}=\frac{\alpha^3}{2\alpha^2}=\frac{\alpha}{2}$$

因此

$$a_{10}=2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{R}{\alpha}$$

换句话说,a_{10} 等于圆的半径经黄金分割后较大的部分.

实际上在计算 a_{10} 时,可以取相邻斐波那契数的比去代替 α(见 §1第26款或者 §3第10款)并且近似地认为 a_{10} 是$\frac{8}{13}R$ 乃至$\frac{5}{8}R$.

4.我们考察正五边形.它的对角线构成一个正五角星形(图6).

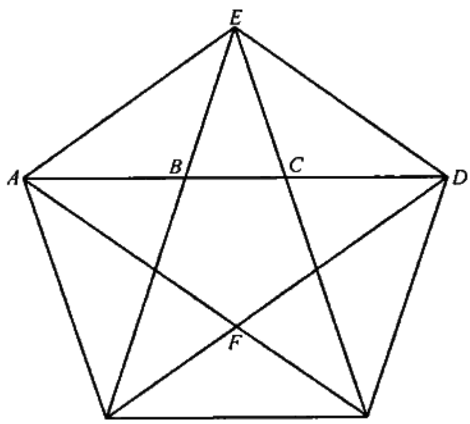


图6

$\angle AFD$ 等于 108°,而 $\angle ADF$ 等于 36°.这意味着,根据正弦定理

$$\frac{AD}{AF}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}=2\cos 36^\circ=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\alpha$$

因为显然 $AF=AC$,应该有

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \alpha$$

所以点 C 分线段 AD 为黄金分割.

但由黄金分割的定义

$$\frac{AC}{CD} = \alpha$$

注意 $AB = CD$,我们得到

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \alpha$$

因此,线段 BC,AB,AC,AD 中每一条线段都是紧随其后的那条线段的$\frac{1}{\alpha}$.

请读者顺便检验

$$\frac{AD}{AE} = \alpha$$

5. 我们取一个边长为 a 和 b 的矩形. 在这个矩形中顺次地作尽可能大的内接正方形,如图 7 所示.

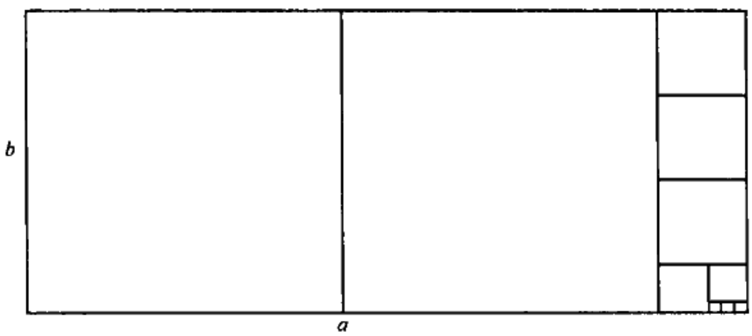


图 7

§2 第 5 款的讨论指出,在 a 与 b 是整数的情况,这个过程与对这两个数进行的欧几里得算法相对应. 此时,同样大小的正方形的数目(§3 第 1 款)对应着展开$\frac{a}{b}$ 为连分数时的不完全商.

如果将两边之比为两个相邻的斐波那契数之比的长方形(图 8) 分为正方形,那么根据 §3 第 5 款可知,除两个最小的正方形外,所有的正方形是全不相同的.

因为所有这些正方形的边长分别等于 $u_1,u_2,\cdots,u_n$,它们面积之和,显然等于 $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2$,但这是被我们剖分的矩形的面积. 它等于 u_nu_{n+1}.

这样一来,对任意的 n

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

我们重新得到了 §1 第 4 款结论的几何证明.

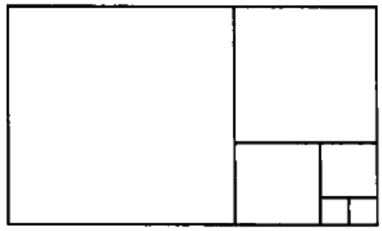


图 8

6. 设矩形两边之比为 α(为简单起见,这样的矩形我们叫做黄金分割矩形). 现在我们证明,在黄金分割矩形中内接一个尽可能大的正方形(图 9),我们仍得到一个黄金分割矩形.

实际上

$$\frac{AB}{AD} = \alpha$$

按照条件 $AD = AE = EF$,于是 $AEFD$ 是正方形.

这意味着

$$\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \alpha^2 - 1$$

但 $\alpha^2 - 1 = \alpha$,于是

$$\frac{EF}{EB} = \alpha$$

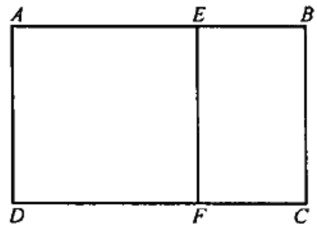


图 9

在图 10 中指出,作为黄金分割矩形可以"几乎全部"为正方形 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,…所取尽,在这个过程中,每次轮到取的正方形以后,剩下的图形是一个黄金分割矩形.

请读者将这些讨论与 §3 第 5 款和第 9 款的内容进行对照.

我们注意到,如果在正方形中内接黄金分割矩形 Ⅰ 和正方形 Ⅱ 与 Ⅲ,如图 11 所示,则剩下的矩形也是黄金分割矩形,这个证明留给读者.

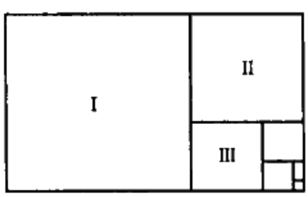


图 10

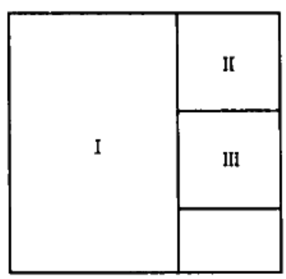


图 11

7. 与黄金分割矩形相类似,可以论及黄金分割三角形:内角为 36°,72° 和

72° 的锐角三角形，以及内角为 108°，36° 和 36° 的钝角三角形. 在图 12 中看到，黄金分割的锐角三角形怎样分为三个小的黄金分割三角形，它们的边和角我们都在图中表示出来了.

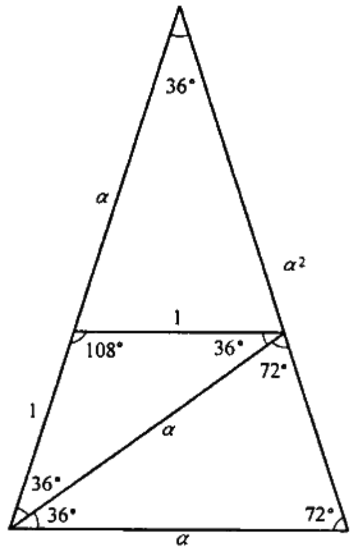


图 12

8. 大自然为我们给出了许多用斐波那契数刻画的同类对象排列的例子.

在各种各样的排列成螺线形的植物的极微小的部分，通常可以观察到两族螺线，它们中的一族螺线顺时针盘旋，而另一族是逆时针盘旋. 这两类螺线的数目经常显现为相邻的斐波那契数.

于是，取幼松的小松枝，容易发现针叶形成从右下到左上的两条螺线，同时它们也组成由左下到右上的三条螺线.

在许多松球果种子(即“鳞片”) 上排列着三条螺线，微微倾斜地缠绕在松球果的核上，它们也排列为五条螺线突起地缠绕在相反方向上. 在粗大的松果上能够看到 5 和 8 条以至 8 和 13 条螺线. 在菠萝上也能很好地发现这些螺线：通常它们有 8 和 13 条.

在许多菊科(例如，雏菊或母菊) 可以看出在花序 —— 花盘中个别颜色的螺线排列. 这里螺线数在一个方向上是 13 而在另一方向上是 21 或者甚至分别为 21 和 34. 特别的，在粗大的向日葵种子的排列中可以看到许多螺线. 它的数目在每个方向上能够分别达到 55 和 89.

9. 黄金分割矩形看起来“比例” 匀称，式样使人赏心悦目，且有这种形式的物体使用方便，所以我们许多“矩形” 的日用物件(书本、火柴盒、手提箱等) 常采用这种形式. 例如，给定的书的形状是边长之比为 1.62 的矩形，而它的每页中充满文字部分的形状是边长比为 1.64 的矩形(再一次让我们注意到 $\alpha = 1.6180$).

古老的莱比锡市政机关塔和它左右两旁的所有建筑物在垂直轴线上是成为黄金分割的. 如果人体确定的部位彼此之间作为线段成黄金分割，这样的人体图形被认为是理想的身段.

17 世纪杰出的几何学家和天文学家开普勒(其实，在那个时代他是有名的大星相学家) 甚至敢于简述黄金分割律，同有如毕达哥拉斯定理这样基础的数学事实置于一个水平上. 然而，如果在开普勒时代对这点可以产生不同的见解，那么现在认清了毕达哥拉斯定理的重要性较之黄金分割的重要性高得不可比

拟.毕达哥拉斯定理在研究几何对象时起着基础的(同时在某种意义下是万能的)作用.而它的深刻的推广渗透到不同的、其中包括最现代的数学篇章.黄金分割,正如在本节中讨论见到的例子,涉及的是个别的、孤立的事实.此外,从纯“算术”的观点毕达哥拉斯定理在基本的几何图形中能够建立这个或另外的线段之间本身的各式各样的“二次 —— 无理的”关系式.于是正方形的研究得出数$\sqrt{2}$(正方形的对角线与它边长的比),等边三角形的研究得出数$\sqrt{3}$(等边三角形的高同它边长之半的比),正五边形的研究导出数$\sqrt{5}$并且它同黄金分割有着联系.它因而尽管很有趣,但只是对毕达哥拉斯定理的极小部分的说明.

10.黄金分割矩形和三角形,还有另外的可观察到“中外比分割”的图形的外在的美妙,被古代和中世纪的哲学家们提高为美学甚至哲学的原则.用黄金分割以及某些数字的关系,企图不仅是描述,而且是说明自然现象甚至社会生活.而随着数 α 本身和它的收敛分数产生了各种类型的神秘的运算.

在这样的讨论中,图 6 描绘的被称做五角星形的图形扮演着重要的角色.这里我们提到歌德《浮士德》中的一个故事.

美菲斯托菲尔①
现在我能离开吗?

浮士德
这是什么问题?走.
……
…… 门没有上锁.

美菲斯托菲尔
不是,现在我出走困难,
这里稍许有些东西妨碍我,
魔幻的符号在您的门槛.

浮士德
这个五角星形是这个罪过?

在 20 世纪末我们当今的时代,出于好奇,出现了复发对黄金分割遏制不住的推崇.顺便提一下,现在星相学的复兴很时髦.想必心理学家总有一天能够找到这些民众的精神偏差的原因.

---

① 歌德《浮士德》中的恶魔,否定一切怀疑一切的反面典型人物.—— 译者注

11. 在各种几何构图讨论路径的问题中同样出现了与斐波那契数的联系，我们研究的例子是图 13 中表示的路径(这样的网络在数学上通常叫做有向图)，计算由顶点 A 或顶点 B 沿着箭头运动转移到 C_n 的路径数.

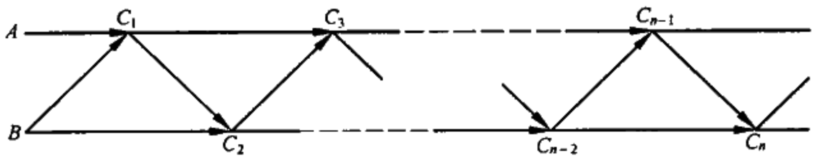


图 13

我们通过 a_n 和 b_n 分别表示这样的路径数. 很清楚，无论从点 A 开始运动还是从点 B 开始运动，进入顶点 C_n 能有两种方法：通过顶点 C_{n-1} 后面一步沿着斜棱走和通过顶点 C_{n-2} 后一步沿着水平棱走，这意味着

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

剩下注意，$a_1 = a_2 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2$，由此立即推出 $a_n = u_n$ 和 $b_n = u_{n+1}$.

12. 下面的问题已经不涉及有向图中计算路径数，而是选择沿着这些路径的合理的转移.

我们考察的下面的比赛游戏，它传统的提法叫做“拣石子”. 设有两小堆游戏对象(例如，火柴). 两个游戏者轮流地要么由一堆中取走任意数目的对象，要么从每堆中取走相等的对象. 谁取走最后的对象就认为获胜.

这个游戏能够像前面有向图游戏那样表示为更加数学化的形式，如图 14 所示. 我们认为放在坐标平面上的图，并且它的每个顶点的两个整数坐标分别是第一小堆和第二小堆对象的数目(例如，图 14 中的粗黑点的坐标是(5,3)). 游戏的初始状态是在对应的图的顶点放上一个筹码. 游戏的过程是游戏者轮流减少坐标数，要么从顶点的一个坐标中减去整数，要么从两个坐标减去同一个整数，也就是筹码沿着图 14 箭头运动任意距离(即按照国际象棋中皇后的走法规则). 显然，筹码在有限步数后会移到坐标原点(在图中标有圆圈). 放筹码到这个顶点的游戏者被认为是获胜者. 为简单起见，这个游戏称为游戏 Γ. 而图 14 表示的图形叫做游戏图 Γ. 在图中筹码处在(或能够放置的) 图形的顶点，同时指出游戏者具有怎样的轮流的步数，将叫做游戏位置.

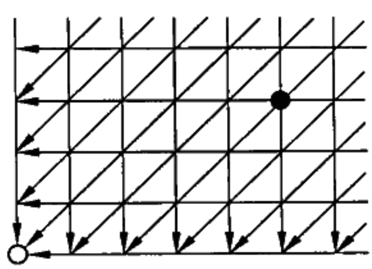


图 14

与游戏 Γ 相应，提出关于图形顶点(游戏位置) 的问题，在图中简述出这个或另一个游戏者获胜(因而他的对手必遭失败) 的可能性，我们运用下面的程序研讨这个问题.

第一，简述对游戏 Γ(实际上是对这种类型的所有游戏) 获胜位置的足够精确的概念.

第二，简述所有获胜位置集合的某种图式.

第三，用斐波那契表示的术语(在 §1 第 27 款的意义下) 描述获胜位置的坐标.

最后，第四，由获胜位置的坐标的斐波那契表示，改变它们为明显的公式手段的描述.

我们着手完成这个程序.

13. 我们所说的获胜位置是指，如果游戏者引导筹码到这个位置，保障自已获胜. 而与它的对手怎样引导自己无关.

在游戏 Γ 中获胜位置的平凡的例子是顶点(0,0)，游戏者引导筹码到这个位置就已经获胜了，对手已经不能进行任何操作.

获胜位置的简单例子是(1,2). 对手能由它移到(0,2)，(1,0) 或(0,1) 位置中的一个，在所有三种情况下我们的游戏者由这些位置的每一个都能转移到(0,0)，因而获胜. 在此范围位置(2,1) 也是获胜位置.

更详细但没有更多的困难还可以证明(3,5) 和(5,3) 也是获胜位置.

形式地说，在本款开始引进的定义中，即“而与他的对手怎样引导自已无关”的说法，我们暗中使用了新的概念：游戏者“引导”. 为了进一步的讨论有意义，我们应当精确地描述这个概念.

我们想象每个游戏者在游戏前首先坐下来做出游戏的精确计划，即拟定他在每一个刚刚走到的位置上应走的步数. 这个计划通常叫做游戏者的战略. 这样一来，在游戏 Γ 中游戏者的战略是在所有位置集合上定义的函数，同时它在已知位置 P 的值可以是由 P 转移到的任意位置. 刚好两个游戏者选择自己的战略. 游戏的全部发展可以认为是定数，无论筹码最开始处于怎样的位置，轮到走的游戏者移动筹码到与自己的战略相对应的某个完全确定的位置，但在新的位置上轮到另一个游戏者移动筹码，他根据自己的战略也应当是走完全确定的步数. 此后又轮到第一个游戏者移动筹码，依此类推. 结果筹码将按图中单值确定的路线移动.

现在我们能够规定在游戏 Γ 中获胜位置的概念：一个位置被称为获胜位置，如果对在这个位置的游戏者 A 存在这样的战略，使得他的对手 B 无论怎样的战略，游戏者 A 都引导筹码到位置(0,0).

无论在哪个范围还没给出他游戏“马马虎虎”的根据，发现游戏者达到获

胜位置是重要的.反之,这只意味着对它存在某个战略(它自然也叫获胜战略),对它还要精确的建立并且无条件地遵守.

显然,获胜战略应当在对手每走一步以后重新导致游戏者在一个获胜位置.在相反的情形,如果游戏者某步以后没有在获胜位置,那么它不能继续获胜,而这与他选择的战略是获胜战略的命题相矛盾.

因此,从引入个别的获胜位置的概念开始,为了它的精确定义对所有个别获胜位置进行讨论.因此,最开始我们同时谈及关于所有获胜位置的集合是适当的.

14.考察在游戏图 Γ(或者在任意另外的有向图)游戏中的某些位置的集合 R.它们可能具有(或者不具有)下列性质:

(1) 在属于 R 的位置任意走法,都走到 R 的范围之外,根据在这里不能涉及的某些十分深刻的理由,在游戏(或在图)中位置集合的这个性质叫做它的内稳定性.

(2) 在不属于 R 的任意位置,存在着走入 R 的位置的走法,R 的这个性质叫做它的外稳定性.

在有向图游戏中的同时是内稳定性和外稳定性的位置的集合,在与沿图的顶点轮流移动相联系的游戏中具有很大意义.这个集合叫做这些游戏的解(也是这些游戏图的解).如果筹码在游戏过程中出现在属于解的位置上,那么轮到走着的游戏者注定要失败,所有后面的"离开解的企图都是无效的":无论他怎么走,根据外稳定性,他移动筹码到解的范围之外,但根据外稳定性,他的对手会在下一步移动筹码到解的内部.

在研究的游戏 Γ 中,任何一局,筹码被移到坐标原点时结束,移筹码到坐标原点的游戏者是获胜者.也就是说,如果游戏的解包含坐标原点,那么轮流走着的游戏者,落在一个属于解的位置,他必获胜.因此这个解由获胜位置组成.

我们全部谈到的都是详细地研究包含坐标原点的游戏解的问题的足够基础.

15.首先建立这个解的唯一性.

引理　对于游戏 Γ 存在不多于 1 个包含坐标原点的解.

证明　我们不顾及引理的论断而假设有两个这样的解 R 和 S,同时 S 的某个位置 s_1 不属于 R.根据 R 的外稳定性,由位置 s_1 能变到 R 的某个位置 r_1.但根据 S 的内稳定性位置 r_1 不能属于 S.即是说根据 S 的外稳定性由 r_1 变到 S 的某个位置 s_2,它(根据 R 的内稳定性)不能属于 R.继续不断地重复这个过程,得到位置序列 $s_1,r_1,s_2,r_2,\cdots$,它结束于坐标原点并且它的每一个位置只属于解 R 或者解 S 中的一个,这意味着坐标原点应当只属于 R 或者只属于 S,于是我们得到矛盾.

16. 游戏的包含坐标原点在内的解 R 的确定的"特征"性质,用下面的定理来刻画.

定理 设 R 是游戏 Γ 中具有下列性质的位置的集合.

(1) 位置(0,0)属于 R.

(2) 如果 (a,b) 属于 R,则 (b,a) 属于 R.

(3) 对于任意的自然数 a 恰能找到一个自然数 b,使得 (a,b) 属于 R.

(4) 对于任意的自然数 d 恰能找到 R 中的一个数对 (a,b),满足 $a-b=d$.

(5) 如果位置 (a,b) 和 (k,l) 属于 R,同时 $a<b, k<l$ 且 $b-a<l-k$,则 $a<k, b<l$.

那么集 R 是游戏 Γ 的解.

证明 首先发现,由(3)推得,每一个自然数恰是由 R 的一个对称的数对的坐标(性质(2)).

我们转向建立集合 R 的内稳定与外稳定的性质.

① 内稳定性.设 (a,b) 属于 R.如果 a 或 b 减少,那么产生与 b(同 a 对应的)组合在一起的另一个数,并且根据(3)不属于 R.如果 a 和 b 同时减少同样的值,那么所得数对与 (a,b) 有相同的坐标差,根据(4)不能属于 R.

② 外稳定性.设 (a,b) 不属于 R.

如果 $a=b$,那么由这个顶点可以变到顶点(0,0),根据(1)属于 R.

如果 $a\neq b$,那么根据(3),存在这样的 c,使得 (a,c) 属于 R,而根据(4)存在这样的 k 和 l,使得 $l-k=b-a$ 且 (k,l) 属于 R,则当 $c<b$ 由 (a,b) 中 b 减少变到 (a,c),而当 $c>b$ 时成立 $c-a>b-a=l-k$,于是根据(5)应当有 $c>l$ 且 $a>k$.并且位置 (a,b) 的每个坐标减少 $a-k=b-l$ 给我们位置 (k,l).

两重稳定性证明了 R 是解.

17. 现在不难建立某种展开(本质上是递归的),产生游戏 Γ 的包含(0,0)的解 R 的过程.

我们从位置(0,0)开始,而后已写出位置的组成

$$(0,0),\begin{matrix}(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)\\(b_1,a_1),\cdots,(b_n,a_n)\end{matrix}\tag{4.4}$$

其中对于 $i=1,2,\cdots,n, a_i<b_i$.我们假定 a_{n+1} 等于不参与在(4.4)组成中的数中的最小数, b_{n+1} 等于 $a_{n+1}+(n+1)$.

事实上这个过程导致位置组

$$(0,0),\begin{matrix}(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),(9,15),\cdots\\(2,1),(5,3),(7,4),(10,6),(13,8),(15,9),\cdots\end{matrix}$$

对应这组位置的集合,正如图 15 中所见到的,"几乎"排成两条射线.

由描点作图直接可见,得到的位置组满足由前款所证定理的条件(1) ~ (5).因此,它们是游戏的解,而根据第15款——是包含位置(0,0)的唯一解.我们注意,游戏 Γ 还有不包含这个位置的解.但是对这个情形我们没有兴趣.

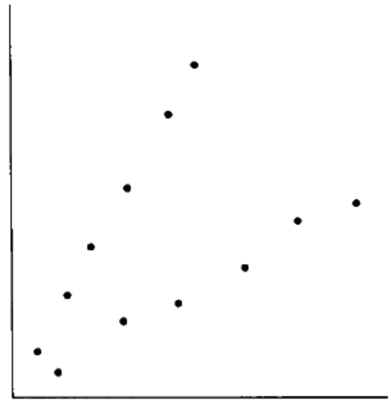


图15

原则上寻求游戏 Γ 解的问题向我们提供的就是解本身.然而集 R 虽然对我们是单值确定的,但具有一眼看到的不好的形式,我们将另外说明它.

18.正如在§1第27款那样,设 $\varphi(t)$ 表示自然数 t 的斐波那契数表示.可以认为,表示每个数的斐波那契数码最后是某些数量的零(如果这些零不存在,那么它的个数显然等于0).划分全部正整数为两类:在自己的斐波那契表示的末尾具有偶数个或者奇数个零.显然,第二类的每个数可以由恰由一个第一类的数对它的斐波那契表示向右边添写一个零而得到.因而并为一对子的数是自然的,我们证明,所有这样的对子(a,b)(和它的对称的对子(b,a))和对子(0,0)一起满足第16款定理的条件,也就是构成游戏 Γ 的解.

条件(1) ~ (3)成立是显然的.

我们考察构成的对子的差,并且证明,每个差值 d 恰遇到一次.进一步,利用数的斐波那契表示,我们为了方便由最低向最高的次序将斐波那契码编排,也就是,将数的斐波那契表示写成 $\varphi_n\varphi_{n-1}\cdots\varphi_2$ 的形式(其中,自然 φ_2 是对 u_2 的系数).

如果斐波那契表示

$$\Phi(d) = \varphi_l\cdots\varphi_2 \tag{4.5}$$

末尾有奇数个零,那么取 a 和 b 的斐波那契表示

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= \varphi_l\cdots\varphi_2 0\\ \Phi(b) &= \varphi_l\cdots\varphi_2 00\end{aligned} \tag{4.6}$$

我们有

$$\begin{aligned}b - a &= (\varphi_l u_{l+2} + \cdots + \varphi_2 u_4) - (\varphi_1 u_{l+1} + \cdots + \varphi_2 u_3) = \\ &\varphi_l(u_{l+2} - u_{l+1}) + \cdots + \varphi_2(u_4 - u_3) = \\ &\varphi_l u_l + \cdots + \varphi_2 u_2 = d\end{aligned}$$

如果 $\Phi(d)$ 末尾有偶数个零:$\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = \varphi_{2m+1} = 0$ 且 $\varphi_{2m+2} = 1$ $(m \geqslant 1)$,那么我们取

$$a = \varphi_l \cdots \varphi_{2m+3}\underbrace{0101\cdots01}_{(m+1)\text{次}01} \qquad (4.7)$$
$$b = \varphi_l \cdots \varphi_{2m+3}\overbrace{0101\cdots010}$$

计算

$$b - a = \varphi_l u_{l+2} + \cdots + \varphi_{2m+3}u_{2m+5} + u_{2m+3} + \cdots + u_3 -$$
$$(\varphi_l u_{l+1} + \cdots + \varphi_{2m+3}u_{2m+4} + u_{2m+2} + \cdots + u_2) =$$
$$\varphi_l u_l + \cdots + \varphi_{2m+3}u_{2m+3} + u_{2m+1} + \cdots + u_1$$

或者,利用公式(1.2)

$$b - a = \varphi_l u_l + \cdots + \varphi_{2m+3}u_{2m+3} + u_{2m+2} = d$$

我们检验具有给定差值 d 的对子的唯一性.

如果 $\Phi(d)$ 在末尾有奇数个零,则当另一对子(a,b) 和这些数的斐波那契表示(4.6) 是另外的,那么此时 $\Phi(d)$ 是另外的,而根据斐波那契表示的唯一性,另外的是 d.

当 $\Phi(d)$ 末尾是偶数个零的情况,实质上是如此简单,虽然需要对某些计算进行分析.

设表达式

$$\Phi(d) = \mu_k \cdots \mu_2$$

末尾恰有 $2m$ 个零

$$\mu_2 = \cdots = \mu_{2m+1} = 0, \mu_{2m+2} = 1, \mu_{2m+3} = 0$$

有

$$d = \mu_k u_k + \cdots + \mu_{2m+4}u_{2m+4} + u_{2m+2} \qquad (4.8)$$

表示 d 为差 $b-a$ 的形式,其中 $\Phi(a)$ 末尾有偶数个零,而 $\Phi(b)$ 是由 $\Phi(a)$ 采用对 $\Phi(a)$ 右边再写一个零的办法得到的.设

$$a = \varphi_l u_l + \varphi_{l-1}u_{l-1} + \cdots + \varphi_3 u_3 + \varphi_2 u_2$$
$$b = \varphi_l u_{l+1} + \varphi_{l-1}u_l + \cdots + \varphi_3 u_4 + \varphi_2 u_3$$

那么

$$d = b - a = \varphi_l u_{l-1} + \varphi_{l-1}u_{l-2} + \cdots + \varphi_3 u_2 + \varphi_2 u_1 \qquad (4.9)$$

如果此时 $\varphi_2 = 0$,则 $\varphi_l\varphi_{l-1}\cdots\varphi_3$ 是 d 的斐波那契表示,根据这个表示的唯一性它的数码应当同(4.8) 的数码相一致,其中应当有

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = \varphi_{2m+2} = 0, \varphi_{2m+3} = 1$$

也就是数 a 的斐波那契表示末尾有奇数个零,与 a 和 b 的选择矛盾.这意味着 $\varphi_2 = 1$.那时

$$d - 1 = \varphi_l u_{l-1} + \varphi_{l-1}u_{l-2} + \cdots + \varphi_3 u_2$$

和

$$\Phi(d-1)=\varphi_l\varphi_{l-1}\cdots\varphi_3 \tag{4.10}$$

而另一方面,由(4.8)和(1.2)推出

$$d-1=\mu_k u_k+\cdots+\mu_{2m+4}u_{2m+4}+u_{2m+2}-1=$$
$$\mu_k u_k+\cdots+\mu_{2m+4}u_{2m+4}+u_{2m+1}u_{2m-1}+\cdots+u_3$$

根据斐波那契表示的唯一性同(4.10)一起给出

$$k=l-1,\mu_k=\varphi_l,\cdots,\mu_{2m+4}=\varphi_{2m+5},\varphi_{2m+4}=0$$
$$\varphi_{2m+3}=\varphi_{2m+1}=\cdots=\varphi_3=0$$
$$\varphi_{2m+2}=\varphi_{2m}=\cdots=\varphi_4=1$$

此外,正如已经证明的,$\varphi_2=1$.因此 a,所以 b 必定具有公式(4.7)的形式.

这意味着,遵守条件(4).

最后,显然在完成带有简单的位置坐标差的构造条件中坐标本身应当增加,这意味着条件(5)实现了.

这样一来,构造的数对组是游戏 Γ 的包含(0,0)的解.因为这个解的唯一性的证明应当与在第16款的构造结果是一致的.

数的斐波那契表示能够对每个自然数直接指出它的"对子",例如,我们找数31的"对子".对于这个数我们有 $\Phi(31)=1010010$.所得表示式末尾是一个零.这意味着,同它成"对子"数的表达式由去掉最后的零而得到,即是101001;它是数 $13+5+1=19$ 的斐波那契表示.

19.由游戏 Γ 所得解的写法中试图除掉在最后结论中斐波那契表示的递归的残余.作为自然的期望(见 §1 第16款引入比内公式的例子),这将与数 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的利用相联系.

预先我们证明辅助引理,顺便说一下,它的意义离我们现在考察的问题很远.

引理 设 γ 和 δ 是正无理数,它们有

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1 \tag{4.11}$$

则在两个系列数中

$$a_n=[n\gamma],n=1,2,\cdots$$
$$b=[n\delta],n=1,2,\cdots \tag{4.12}$$

(其中方括号意味着在它里面的数的整数部分)任意自然数遇到恰好一次.

证明 我们首先注意到 $r,\delta>1$.再取任意的自然数 N,并且考察使得 $[n\gamma]<N$,即 $n\gamma<N$ 或者 $n<\frac{N}{\gamma}$ 的所有自然数 n 的值.因而所有自然数 $n=1,2,\cdots,[\frac{N}{\gamma}]$ 满足这个不等式.

类似的,对所有的 $n = 1,2,\cdots,[\frac{N}{\delta}]$ 满足 $[n\delta] < N$. 也就是说,数的系列 1, 2, $\cdots$, N 将全是(4.12)形式的数 $[\frac{N}{\gamma}] + [\frac{N}{\delta}]$. 但 $\frac{N}{\gamma}$ 和 $\frac{N}{\delta}$ 不是整数,即

$$\frac{N}{\gamma} - 1 < [\frac{N}{\gamma}] < \frac{N}{\gamma}, \frac{N}{\delta} - 1 < [\frac{N}{\delta}] < \frac{N}{\delta}$$

所以,这些不等式相加且顾及(4.11),得到

$$N\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right) - 2 = N - 2 < [\frac{N}{\gamma}] + [\frac{N}{\delta}] < N\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right) = N$$

即写在关系式中间的部分是严格地在 $N - 2$ 和 N 之间的整数,这个数是 $N - 1$

$$[\frac{N}{\gamma}] + [\frac{N}{\delta}] = N - 1$$

因此,对任意自然数 N,小于 N 的一系列数中恰有 $(N-1)$ 个形如(4.12)的数:它们是所有的小于 N 的自然数.剩下我们引证数 N 的任意性.

20. 数对 $([n\gamma],[n\delta])$ 满足第15款中定理的条件(1) ~ (3). 为了它们满足这个定理的这样的条件(4)和(5),必须对任意的自然数 n 有

$$b_n - a_n = [n\delta] - [n\gamma] = n$$

但因为

$$n = n + [n\gamma] - [n\gamma] = [n + n\gamma] - [n\gamma] = [n(1 + \gamma)] - [n\gamma]$$

这等价于,对任意的 n 成立 $[nb] = [n(1 + \gamma)]$. 如果现在 $\delta \neq 1 + \gamma$,那么存在如此之大的 n,使得数 $n\delta$ 和 $n(1 + \gamma)$ 差别远比1大,于是 $[n\delta] \neq [n(1 + \gamma)]$. 而这不可能,即意味着 $\delta = 1 + \gamma$. 由(4.11)有

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 + \gamma} = 1$$

由此得出, $2\gamma + 1 = \gamma(\gamma + 1)$ 或者 $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$.

因为 γ 是正数,所以

$$\gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$$

且

$$\delta = 1 + \alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

因此,在游戏 Γ 中获胜位置的坐标由数对 $\left(\left[n\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right], \left[n\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]\right)$ 的计算直接给出.

21. 用一个几何学的小玩笑结束我们的叙述. 现在我们直观地"证明 64 = 65". 为此取边长为8的正方形并分它为如图16所示的4个部分. 这四个部分拼成一个边为13和5,也就是面积等于65的矩形,如图17所示.

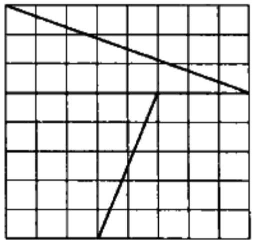


图 16

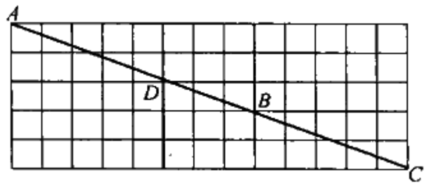


图 17

对这个乍看起来颇为神秘的现象不难找到它的解释.全部的事实在于,图 17 中的点 A,B,C,D 其实不在一条直线上,而是一个平行四边形的顶点,它的面积恰好就等于"多出来的"一个单位.

这个似真的但不真的"证明",显然是假证明(这样的"证明"称为诡辩).能够做得更加直观与"令人信服",如果代替边长为 8 的正方形而取边长等于某个具有足够大的偶角码的斐波那契数 u_{2n} 的正方形,分这个正方形为四个部分(图 18).由这些部分拼成矩形(图 19).沿着矩形对角线出现了一个形如平行四边形的"小空隙",根据 §1 第 9 款,这个小空隙的面积等于 1.这个窄小部分的最大宽度是平行四边形的高,容易计算,这个高是$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2+u_{2n-2}^2}}$.

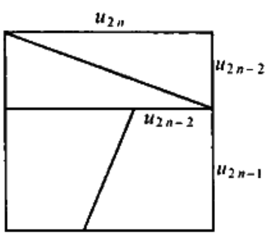


图 18

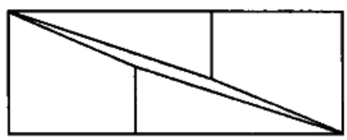


图 19

因此,如果我们取边长为 21 cm 的正方形并且把它"变"为边长为 34 cm 和 13 cm 的矩形时,得到小窄条的最大宽度是$\frac{1}{\sqrt{21^2+8^2}}$ cm 也就是将近 0.4 mm,这几乎是看不出来的.

§5 斐波那契数与搜索理论

1. 任何运算的效能都依赖于这个运算的实施,也就是与定义这个运算的参数(或几个参数) 有关. 与此相关的问题是,确定这样的参数值,从而使运算达到最好的效能. 进一步我们将"最好的效能" 理解为减少运算的不良好的影响是恰当的. 也就是使不良好的影响极小化,对于解决函数的极小化问题经常可以采用微分学的方法.

如果刻画运算效能含有参数的函数(为具体起见,我们限于恰有一个参数的情形) 是由解析式给出并且是可微的(即存在导数),那么它的最小值应当要么在参数变化区间的一个端点达到,要么在区间中这样的一点达到,在这个点函数的导数等于零.

然而,在实际中常常遇到的函数是如此的复杂,繁琐的解析表达式使得刻画导数等于零的方程式解起来已经极端的困难. 当然,这里可以借助求方程近似解的方法,然而它们也有伴随而来的困难.

更为糟糕的是,函数的解析式一般是不存在的. 代之以给予按确定的方案选择的这个或另外的点计算个别的函数的可能性(或者,甚至是用单纯的实验来确定). 如果函数是任意的,那么这里搜索函数最小值的任何方案,自然不能认为是适当的,或者,所有这些方案在一定范围内是适当的(或者说,如果是随意的,就不是适当的). 函数的最小值点可以出现在两个非常接近的点之间包含的任何位置上,这两个点对应着比它大的函数值(图 20). "选取" 出这样的最小值的机会,显然是很小的.

同时，如果引入一般的函数得以臆断地知道些什么，那么，近似地求它的最小值的问题就变得更有前途了，关于搜索它的整个方向可以说更加确定了.

下面的叙述中提出这个问题的一个变式，它的解与斐波那契数有联系. 为直观起见，我们把这个问题表述为某个十分具体的日常生活中问题的形式.

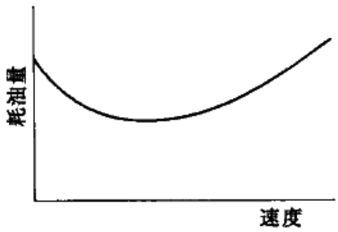


图 20

2. 众所周知，当速度很小时，汽车每千米路程的耗油量比较大；在较大速度时，汽车每千米的耗油量也较大. 这时我们问：汽车按怎样的中间速度行驶"最理想"？也就是汽车以怎样的速度行驶时，千米路程上的耗油量最少？因此，可以假设汽车千米路程的耗油量与汽车速度之间的相依关系的大概图象，如图 20 所示. 首先随着速度增大千米耗油量减少到某个最小值，然后速度进一步增加时千米耗油量就一直上升了（正如通常数学上讲的"单调"上升）.

尽管这个关系（首先下降然后上升）的图形的一般轮廓对所有汽车实际上都是一致的，然而它的精确的形式甚至在同一类型汽车和范围内也有某些变化，这与机器的特殊性能，它的这个或那个机构部件的磨损程度都有关系. 特别的，在我们图中的最小值也能出现在十分广泛的范围.

现在假定，给我们安排了供自己使用的汽车以便在某个地域游览，但在行进途中没有加油站. 为了有可能乘车走最大的距离，我们就应该足够精确地确定相应的最小耗油量的速度. 这个速度通常称为最经济的速度.

确定汽车最经济的速度自然总是采用实验的方法. 用不同的速度驶过面临游览条件的典型性能与质量的千米路段，并且记录下汽车每次的耗油量. 因为这项工作并不快活，自然会考虑下面的问题：为了确定汽车最经济的速度达到给定的精度，对此需要提供多少次实验就够了？在这些耗油实验中确定怎样的速度？对这些最接近的是下面的两个问题：为了找到带有最大精度的经济速度，怎样限定实验的数目？这个最大精度是怎样的？

此时，"给定精度为 ε" 的最经济速度的定义，我们理解为是这样的速度 v，最经济速度的真值位于 $v-\varepsilon$ 与 $v+\varepsilon$ 之间（即这个速度确定中的误差不能超过 ε）.

为确定起见，将认为预先知道汽车的最经济速度处于某个界限 v' 和 v'' 之间. 作为速度 v' 的选取资格，显然它不超过最经济速度就可以，而作为速度 v'' 它显然不小于最经济的速度（例如，v' 可以取汽车马达的最小速度，v'' 可以取给定汽车的最大速度）.

3. 我们考察由刚才的具体例子抽象出来的如下的数学问题.

设关于函数 $f(x)$，我们只知道它由给定的 x' 到某个未知的 $\bar{x}$ 是减的，而由这个 $\bar{x}$ 到给定的 x'' 增加(图 21)，特别的，允许未知点 $\bar{x}$ 在实际上与区间的一个端点 x' 或 x'' 重合. 显然在这种情况下函数全部是增的(图 22) 或全部是减的(图 23). 当然，如果后面的两种之一成立时，我们将假定这种情况预先并不知道. 在点 $\bar{x}$ 函数 f 取自己的最小值 $f(\bar{x})$，它称做函数的"最小的"值，或者最小峰值. 在这些情况下，通常说函数在点 $\bar{x}$ 达到最小值，也常称 $\bar{x}$ 为函数的"最小值点".

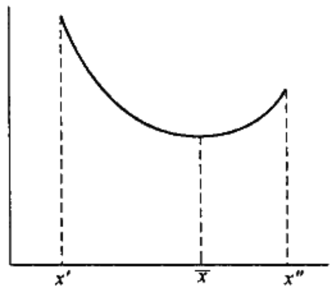


图 21

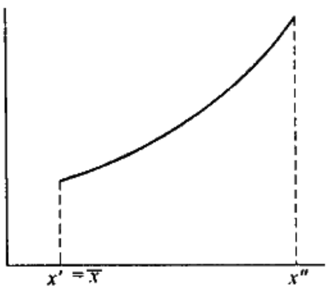


图 22

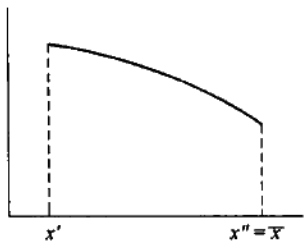


图 23

于是，我们今后只考察这样的函数，其中在增加的后面不能是减小，为简单起见，称这种函数是有一个最小值的函数或者是单峰函数.

本节内容在于分析精确地确定具有一个最小值的函数 f 的最小值点的位置的可能性. 那么，在整个讨论中，对函数 f 是具有一个最小值的函数我们不再每次都作声明. 现在很清楚，对函数最小值的进一步的讨论，只要作相应的改变，对函数的最大值也是正确的.

4. 在所提出的问题里，正如在更广的范围与它类似的问题一样，都有三个因素参与：目的，前面特别提出过它. 可能性，为了实现这个目的可能的安排. 最后是条件，按照它利用可能性来达到目的.

在我们的情况下，目的在于增加确定最小值点的精确度，也就是减少指出的最小值点的误差.

可能性指的是用这个或者另外的方法(计算、测量、甚至最坏的情形是单纯的猜测) 精确地确定在我们任意选出的点 f 的某些个数的函数值. 并将这些函数值按它们的大小彼此进行比较.

最后，条件是用来决定给定函数值域的，也就是，x' 和 x'' 之间区间长 L.

与指出的每个探求的具体问题相对应可以有三个方面.

(1) 在给定的可能性和给定的条件下提出的目的能实现到什么程度？从下面的叙述可以知道，这个问题对我们是适当且有价值的.

设我们有权做出 n 个顺序的 f 的确定的值，每次选取的点都是按自己的判断来确定的，为的是点 $\bar{x}$ 的确定具有最大的精度，在哪些点应该确定函数值，这个最大精度是多少？

(2) 为了在给定的条件下实现提出的目的，怎样的可能性的安排是必要的？

在我们的任务中这个问题可以这样的具体化，设我们想确定函数 f 的具有给定精度的极小值点 $\bar{x}$，也就是指出这样的点 x，使得 $\bar{x}$ 处在 $x-\epsilon$ 和 $x+\epsilon$ 之间，为此，必须确定多少个函数 f 的值，以及对这些值怎样选取？

(3) 在怎样的条件下给定的可能性对达到所提出的目的就足够了呢？

在给定情况下讨论求函数 f 变化的最大区间 L（即差 $x''-x'$ 的最大值），为此，要用通过 n 次观察以后实现确定带有给定精度 ϵ 的函数 f 最小值点的方法.

5. 严格说来，我们现在研究的不是一个问题，而是两个问题.

第一个，谈的是可以求最小值的点 $\bar{x}$，同时一起求得函数在这点取到的函数值 $f(\bar{x})$.

第二个，可以只对点 $\bar{x}$ 本身感兴趣，对值 $f(\bar{x})$ 不感兴趣.

完全清楚，这两个问题中，第一个（称为问题 A）比第二个（称为问题 B）我们的目的要宽阔. 所以自然希望：

(1) 在给定的可能性与条件的情况下，问题 A 的目的比问题 B 的目的实现的程度要更小（当给定数 n 和长 L 时，问题 B 中比在问题 A 中能够得到更小的 ϵ）.

(2) 为了在相同的范围内实现两个问题的目的，在同样的条件下问题 A 必须有较大的可能性（在同样的误差 ϵ 和一致的函数变化区间长 L 的情况下，一般说来问题 A 中必须更大的 n）.

(3) 在相等可能性下实现一致的目的，在问题 A 中需要更加容易的条件（给定 ϵ 和 n，问题 A 中的 L 值只是问题 B 中 L 值的较小的一部分）.

6. 为了做出对问题的完全严格的数学描述，必须讲清楚下面的重要情况.

假定，我们感兴趣的是在长为 L 的区间上确定具有精度为 ϵ 的最小值点 $\bar{x}$ 的可能性（显然，可以认为这个区间的起点在坐标轴上的点 O，而终点在点 L）. 我们考虑解问题 A，也就是对 $\bar{x}$ 和 $f(\bar{x})$ 一起都感兴趣.

假设，选择了下面的方法来确定 $\bar{x}$.

我们完全任意地选出 O 与 L 之间的某个 x，并且确定函数 f 在点 $x-\epsilon$ 与

$x+\varepsilon$ 的值，即计算值 $f(x-\varepsilon),f(x),f(x+\varepsilon)$(图 24). 自然，由 x 选取的完全任意性，总可以认为 $x-\varepsilon\geqslant 0$，使得函数值 $f(x-\varepsilon)$ 能够实际地计算. 同样的，我们可取 $x+\varepsilon\leqslant L$.

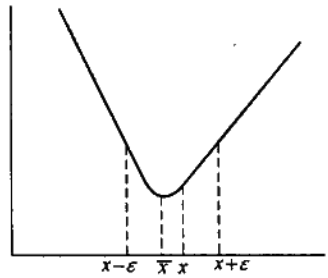


图 24

完全可以认为

$$f(x-\varepsilon)>f(x)<f(x+\varepsilon)$$

这意味着，函数 f 在 $x-\varepsilon$ 是减的，当转移到 $x+\varepsilon$ 时开始增. 然而函数由减到增的转变不可避免地同通过它的最小值联系着，在所给情况下，函数 f 应当在处于 $x-\varepsilon$ 和 $x+\varepsilon$ 之间的某个 $\bar{x}$ 达到这个最小值.

所以 x 与 $\bar{x}$ 相距不超过 ε，x 刚好就是我们探求的 $\bar{x}$ 的近似值. 在这种情况下确定所求的 $\bar{x}$ 是总共经过三次观察实现的. 这个办法可以重复使用. 然而我们没有实际这样进行的任何保证. 尤其是，当线段 L 很长而 ε 很小的时候，则这个现象临近时完全可以指出意外. 相反的情况完全可能存在. 我们选出的三个点很靠近并且函数取的值也比较大，而函数的最小值完全可以在另外的什么地方达到. 因此三次观察可能够用也可能不够用.

我们也需要这样的运算方案，对确定具有精度为 ε 的 $\bar{x}$ 是不可避免的，其中实际上这个点 x 任一个都在里面. 这样的方案是存在的. 例如，我们将有系统地计算我们的函数的值.

$$f(0),f(\varepsilon),f(2\varepsilon),\cdots \tag{5.1}$$

直到暂时不超过这样的 $f(r\varepsilon)$，而 $(r+1)\varepsilon$ 将比 L 大(图 25)，显然，存在 $k\varepsilon$，函数值在序列(5.1) 中有最小值，这就是所求的.

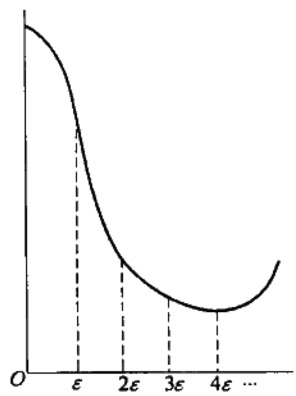


图 25

我们问题解的意义在于，我们不单纯想做出在最不利的生活情境中给出带有指定精度的值 $\bar{x}$ 的运算方案，且是这些方案中最经济的，即"在最恶劣条件下的最好" 方案. 但最恶劣的条件是计算函数 f 的值数量极大. 类似的，最经济的方案是这样的方案，它用计算最少数量的函数值来实现提出的目的.

因此，在最恶劣条件下的最好方案通常叫做极小化极大方案，或者极小极大方案. 我们称这个方案是最优的方案.

最优方案(无论是这个或是任意类似的问题) 指定的运算的实质，能够描述寻求对我们

来说“隐藏”着的函数的最小值是最适当的.“刚刚显示不在那里,我们何处去寻它.”所说的不是什么神秘,也不是迷信,而只是最恶劣情况的特性.我们在它们的计算中鉴定我们的运算是最好的.

7.重要的发现是,并不是探求任何问题都存在最优方案.例如,在问题 B 中就没有最优方案.

事实上,设 $L=2$ 和 $n=2$.我们此时能保证确定 ε 怎样的精度呢?

我们认为区间的端点是0和2.取任意小的正数 ε,并且计算函数 f 在点 $1-\varepsilon$ 和 $1+\varepsilon$ 的值.如果此时

$$f(1-\varepsilon)\leqslant f(1+\varepsilon)$$

那么,所求的最小值 $\bar{x}$ 应在0到 $1+\varepsilon$ 之间,而如果

$$f(1-\varepsilon)\geqslant f(1+\varepsilon)$$

那么,$\bar{x}$ 位于 $1-\varepsilon$ 和2之间.

设在第一种情况下

$$\bar{x}=\frac{1+\varepsilon}{2}$$

而在第二种情况下

$$\bar{x}=\frac{(1-\varepsilon)+2}{2}=\frac{3-\varepsilon}{2}$$

在最恶劣的情况下,这样确定的 $\bar{x}$ 与函数 f 真正的最小值相差为 $\frac{1+\varepsilon}{2}$,ε 向零逼近时,误差减小.但是 ε 不能等于0(因为那时 $1-\varepsilon$ 和 $1+\varepsilon$ 将重合,比较函数 $f(1-\varepsilon)$ 的值与明知等于它的值 $f(1+\varepsilon)$,在同一点计算,没给任何信息).所以偏差总比 $\frac{1}{2}$ 大,尽管能够做到多么任意地接近这个数.

每个正数 ε 在这里确定某个方案.ε 越接近零,这个方案就越好.因为对任何 $\varepsilon>0$ 都还存在比它更小的正数,因此对任意方案还存在比它更好的方案.因此,对于问题 B 最优方案是不存在的.

然而对问题 B 存在“几乎最优的”方案.只需微不足道的改善就可导致这样的结果.精确地说,无论怎样的数 $\gamma>0$,存在这样的方案 P_γ,使得任何另外的方案不能减少给定方案 P_γ 的比 γ 大的误差.

8.用序列(5.1)所描述的方案,当 ε 与考察的给定长为 L 的线段相比较足够小时,就不是最优方案.将这个方案暂存一边,先完成在最恶劣条件下全部 r 的计算.

我们试图略微多少有点不同的进行,我们将通过1计算序列(5.1)的项 $f(0),f(2\varepsilon),f(4\varepsilon),\cdots$ 求在所得序列中的最小项(设它是 $f(2k\varepsilon)$)同时计算两个函数值 $f((2k-1)\varepsilon)$ 和 $f((2k+1)\varepsilon)$,那么对三个变量的值 $(2k-1)\varepsilon,2k\varepsilon$ 和 $(2k+1)\varepsilon$ 来说,此时函数值将是 $f((2k-1)\varepsilon),f(2k\varepsilon),f((2k+1)\varepsilon)$ 三个中最

小的,显然有精确到 ϵ 的 $\bar{x}$ 存在.这个新方案,在最恶劣的条件下经过完成大约 $\frac{r}{2}+2$ 次的计算达到目的.对较大的 r,这实质上比第一个方案计算的次数要小.

于是,第一个方案不是最优的.根据相类似的理由,第二个方案一般说来也不能认为是最优的.

然而第二个方案区别于第一个方案,有一个极为本质的特点:只对预先计划中规定的部分点确定函数值,而剩下的点的选取根据比较已经计算的函数值来实现.直观上完全清楚,最好的运算的选择总应是与利用我们已经完成的运算结果的信息相联系的.在这个意义上说,第二个方案比第一个方案更为完备.但一般说来,归根结底,为找到最优方案,它要接受进一步的改进.

在确定函数最小值位置的过程中,每一个所得的函数值自然要同在前面观察得到的这个或另外的值进行比较.点的选择将取决于进行下面的测定(或者决定于进一步测定的结果).在第一个方案中,依赖于三个点上我们计算的函数值,而在第二个方案中,依赖于自身计算的函数值.

显然,顺次计算函数 f 的值的过程,完全由与任意选取的点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 相适应的某个法则来决定,对任意 $k\geqslant 0$ 在这些点的函数 f 的值是这个或另外的点 x_{k+1},或是决定结束对函数 f 的观察,取这个或另外的点作为 $\bar{x}$.这个对应的法则通常称为判决函数.

每个方案确定某个判决函数,同样的,任何判决函数确定某个方案.本质上,判决函数清晰而且形式地描述方案.例如,在前款考察的第一个方案中确定的判决函数是与 $0\leqslant k<r$ 的每个数的点 $(k+1)\epsilon$ 相适应的,而数 r 是过程的结束.

判决函数的概念属于现代数学中的重要概念之列.很遗憾,对这个概念的十分严格而精确的定义,在这里不能引入了.

9.设方案 P 的目的在于,确定在长为 L 的区间上的函数 f 根据 n 次观察所得极小化点 $\bar{x}$ 的最小误差.这个方案今后称做 n 步方案.

设在某个 n 步方案 P 的条件中得以在区间 L 上确定具有精度为 ϵ 的点 $\bar{x}$,这个精度依赖于方案 P 本身,也就是依赖于 n 和 L,所以我们可以认为它是 P,n 和 L 的函数,并且对问题 A 通过 $\tau_P^A(n,L)$ 来表示,而对问题 B 用 $\tau_P^B(n,L)$ 表示.记号 $\tau_P(n,L)$ 今后理解为表达式 $\tau_P^A(n,L)$ 和 $\tau_P^B(n,L)$ 的任一个(当然是在同一范围讨论的).

在长为 L 的区间上确定 f 的极小值的 n 步方案 P_0 称为问题 A 的最优方案,如果对任何另外的方案 P 都有 $\tau_{P_0}^A(n,L)$ 不大于 $\tau_P^A(n,L)$,即

$$\tau_{P_0}^A(n,L)\leqslant\tau_P^A(n,A)$$

这也可写为

$$\tau_{P_0}^A(n,A)=\min_P\tau_P^A(n,L) \tag{5.2}$$

$f_1=f_2=1\quad f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$

这样一来，数 $\tau_{P_0}^{A}(n,L)$ 已经表现出不是方案，而是问题本身(也就是用 n 步求得在长为L的区间上函数f的极小点的问题)的特征，所以它不依赖于任何方案而只依赖于 n 和L，并且可以简单地用 $\tau^{A}(n,L)$ 来表示.

在问题 B 中的条件说起来有些复杂. 这里，正如我们已经看到的，不存在最恶劣条件下保证最小误差的最优方案，然而存在这样的误差，如果只选择适当的方案，对它可以任意地逼近，这个误差自然地称为边际误差. 它也仅依赖于问题的条件，所以自然地用 $\tau^{B}(n,L)$ 来表示它，任意方案都导致更大的误差

$$\tau^{B}(n,L) < \tau_{P}^{B}(n,L)$$

所以，这里不能写出类似于(5.2) 的等式.

略微提前一点讲述本款的全部讨论，在于得到 $\tau^{A}(n,L)$ 和 $\tau^{B}(n,L)$ 的明显的表达式，有时十分的复杂，正如所显示的，在这些表达式中含有斐波那契数

$$\tau^{A}(n,L) = \frac{L}{u_{n+2}} \tag{5.3}$$

$$\tau^{B}(n,L) = \frac{L}{2u_{n+1}} \tag{5.4}$$

因此，求函数极小值的“停止界限” 允许增加为用它的极小值点的$\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}$倍来确定的精确度. 对于充分大的 n，根据 §1 第 26 款，这个关系式接近于$\frac{2}{\alpha}$ = 1.236，相应精度的增加大约是$\frac{1}{4}$.

10. 完全清楚，对全部下面的讨论重要的不是每个 L 和ε 自身，而是 L 对ε 的比例，这个比是位置 $\bar{x}$ 的相对误差. 如果这个比对我们给出了，则可以选取适当的形式的量 x 的测量单位(即我们区间长的测量单位)，数 L 和ε 之一的选取完全是任意的.

这个设想导致极有教益的结论.

沿 x 轴比例的变更不只区间长L的数值表达式，而且任意方案 P 在相同次数下确定所求点位置的误差都要改变，换句话说，对任意正数 λ，应当有

$$\tau_{P}(n,\lambda L) = \lambda\tau_{P}(n,L) \tag{5.5}$$

精确地说，如果在方案描述中，最小值点的确定不是在绝对长度范围内，而是在相对长度范围内指出区间上这些或另一些点的位置，那么最优方案不被破坏：在方案的描述中这样改变的结果，最优方案仍是最优方案，而非最优方案也仍是非最优方案.

由此直接得出，函数 f 的变化区间作任意倍数的均匀地拉长(或压缩) 实现的只是最优方案的“相似变换”，此时不破坏它的最优性.

这就是说，出现在等式(5.5) 中的误差 $\tau_{P}(n,\lambda L)$ 和 $\tau_{P}(n,L)$，不单纯地是

实施这些或另外一些方案达到的结果，而可以是用不同形式的“相似变换”应用于同一方案的结果.

11. 在所有这些足够的牵涉到的预先讨论之后，我们转向求问题 A 的最优方案和对公式(5.3) 和(5.4) 的证明.

引理 无论怎样的 $n \geqslant 1$ 和 L，存在着长为 L 的区间上在 n 步以内探求函数(带有一个最小值) 的最小值点 $\bar{x}$ 的 n 步方案，具有以下性质：

(1) 在每一步考察某个区间 $x'x''$.

(2) 在第一步计算函数 f 在点 $\frac{u_n}{u_{n+2}}L$ 或 $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$ 中一个点的值.

(3) 从角码 k 开始以后的每一步(即 $1 \leqslant k \leqslant n$) 函数 f 在下面的点

$$x_1 = x' + \frac{u_k}{u_{k+2}}(x'' - x') \text{ 或 } x_2 = x' + \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}(x'' - x') \tag{5.6}$$

之一的值是已知的.

(4) 在第 k 步($1 < k \leqslant n$) 计算(5.6) 中另一点的值.

(5) 在第 k 步($1 < k \leqslant n$) 比较数 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$. 此时，如果 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则在第 $k+1$ 步考察区间 $x'x_2$；而如果 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则考察区间 x_1x''.

证明 对 n 进行归纳.

如果 $n = 1$，那么显然，我们研究的区间由 0 到 L. 计算函数 f 在点 $\frac{u_1}{u_2}L = \frac{L}{2}$ 的值. 在这种情况下后面的各步一般不存在.

现在假设，存在某个 n 步方案，具有我们已经对任意区间建立的在引理条件中所需要的性质. 我们思考建立感兴趣的 $n+1$ 步方案，检验遵守相应的引理的条件. 我们将在每一步考察某个区间 $x'x''$.

作为第一步我们选取点 $x_1 = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$，而作为第二步，选取点 $x_2 = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$，并且比较函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$. 在 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 的情况，我们对 0 和 x_2 之间的区间进行考察(这里 0 起 x' 的作用，而 x_2 起 x'' 的作用)，而在 $f(x_1) > f(x_2)$ 的情况，则对 x_1 和 L 之间的区间进行考察(这里 x_1 起 x' 的作用，而 L 起 x'' 的作用)，在两种情况下考察的区间长都等于 $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$.

完成这两步以后，我们发现对考察的区间正是适应当完成它的第一步后实现 n 步过程这样的条件，即对长为 $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ 的区间我们已知在离它的一个端点为 $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$ 的点处函数 f 的值，所以我们能“转到”这个 n 步过程并进行到它的结束. 根据归纳假设我们可以认为，对后面的 n 步条件(3)，(4)，(5) 成立. 因此剩下考

察第二步的初始条件和进行这个考察.但显然点$\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$具有对$k=2$的情况下(5.6)中第一个表达式的形式,如果在n的位置代之以$n+1$,而第二个表达式在相应的情势下起着我们选取点$\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$的作用.

根据这些归纳推演,引理得证.

12.我们称前面引理中被证明存在的n步方案为n步斐波那契方案,或者简称方案Φ_n.

定理 (1)方案Φ_n是唯一的最优n步方案.

(2)$\tau_{\Phi_n}^A(n,L)=\frac{L}{u_{n+2}}$.

证明 对n进行归纳.

首先考察一步方案Φ_1,在于选取由x'到x''的区间中某个点$\tilde{x}$作为$\bar{x}$.显然,这里在最少的良好条件下误差能够达到数$x''-\tilde{x}$和$\tilde{x}-x'$的最大者.如果这两个数不同,则这个最大误差超过$\frac{L}{2}$;如果这两个值相等,则最大误差等于$\frac{L}{2}$.

因此,方案Φ_1是最优一步方案,而

$$\tau_{\Phi_1}^A(1,L)=\frac{L}{2}=\frac{L}{u_3}$$

当$n=2$时,我们研究方案Φ_2,在于计算和比较函数值$f(\frac{1}{3}L)$和$f(\frac{2}{3}L)$并且选取作为$\bar{x}$的点

$$\frac{1}{3}L,\text{如果 } f(\frac{1}{3}L)\leqslant f(\frac{2}{3}L)$$

$$\frac{2}{3}L,\text{如果 } f(\frac{1}{3}L)>f(\frac{2}{3}L)$$

这里确定在真值$\bar{x}$的最大误差,正如容易见到的,达到$\frac{L}{3}=\frac{L}{u_4}$

$$\tau_{\Phi_2}^A(2,L)=\frac{L}{u_4}$$

因此,归纳基础被证明了.

现在我们假设,斐波那契方案Φ_n具有在定理条件中需要的性质,并且考察$n+1$步的方案.

在方案Φ_{n+1}中对函数f实行前两个观察,由于比较被找到的它的两个值,对适当的长为$\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$的区间进行研究,在这个区间中f在方案Φ_n的一个点的值是已知的,对给出在最小良好情况下的误差

$$\tau_{\Phi_n}^A\left(n,\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L\right)=\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}\tau_{\Phi_n}^A(n,L)=\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}\cdot\frac{L}{u_{n+2}}=\frac{L}{u_{n+3}}$$

因此，$\tau_{\Phi_{n+1}}^A(n+1,L)=\frac{L}{u_{n+3}}$.

剩下证明方案 Φ_{n+1} 是最优的.

为此目的，我们取在两个任意点 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$ 观察函数 f(为确定起见，将认为 $\tilde{x}_1<\tilde{x}_2$). 比较值 $f(\tilde{x}_1)$ 与 $f(\tilde{x}_2)$ 导致探求的点 $\bar{x}$ 或者在由 0 到 $\tilde{x}_2$ 的区间，或者在由 $\tilde{x}_1$ 到 L 的区间上.

如果

$$\tilde{x}_1<\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$$

那么在 $f(\tilde{x}_1)>f(\tilde{x}_2)$ 的情况下，我们按某个 n 步方案进行探求在长为 $L-\tilde{x}_1$ 区间上 f 的最小值点，即这个区间的长比

$$L-\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L=\frac{u_{n+3}-u_{n+1}}{u_{n+3}}L=\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$$

要大. 甚至如果点 $\tilde{x}_2$ 的位置最良好的情况在这个区间上，那么，根据归纳假设，确定的误差仍比 $\frac{L}{u_{n+3}}$ 大.

对称的讨论证明，选择某个点

$$\tilde{x}_2>\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$$

开始的方案，也能在相应的不良的条件下导致确定 $\bar{x}$ 的误差比方案 Φ_{n+1} 大.

现在设 $\tilde{x}_1>\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$. 如果实际上 x 处于 0 和 $\tilde{x}_1$ 之间，那么求这点的位置剩下 $n-1$ 次观察，而包含这个点的区间长比 $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$ 大. 这就是说，甚至方案 Φ_{n-1}(它根据假设，在这些条件下是最优的) 导致我们的误差比

$$\tau_{\Phi_{n-1}}^A\left(n-1,\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L\right)=\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}\tau_{\Phi_{n-1}}^A(n-1,A)=\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}\cdot\frac{L}{u_{n+1}}=\frac{L}{u_{n+3}}$$

大.

对称地可分析

$$\tilde{x}_2>\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$$

的情况. 因此，方案 Φ_{n+1} 是最优方案，定理得证.

于是，在长为 L 的区间上函数 f 唯一的极小化的点能够借助于 n 次观察来

确定，其误差不超过$\frac{L}{u_{n+2}}$.

因此 n 次观察能确定f的误差为ε的极小化的点或者小于长度不超过εu_{n+2}的区间.

最后，为了使在长为 L 区间上确定函数的误差不超过ε的极小值总是有把握的，必须进行这样的 n 次观察，使得

$$u_{n+1} < \frac{L}{\varepsilon} \leqslant u_{n+2}$$

这样一来，我们回答了第 4 款的全部问题.

13. 由上面叙述的问题 A 的解可以没有什么困难地得出问题 B 的解.

设我们给出长为 L 的区间. 在这个区间上进行斐波那契方案 Φ_{n-1} 的前 $n-2$ 步. 由于是对长为$\frac{3L}{u_{n+1}}$，端点是 x' 和 x'' 的区间上实施方案，并且 f 在点 $x_1 = x' + \frac{L}{u_{n+1}}$ 或者 $x_2 = x' + \frac{2L}{u_{n+1}}$ 的一个值是已知的. 我们限定考察这两种情况中的第一种（第二种可对称地进行考察）.

于是，设 $f(x_1)$ 我们已知. 我们选取绝对值小于$\frac{L}{u_{n+1}}$ 的任意数 γ；我们计算 $f(x_2-\gamma)$（这是第 $n-1$ 次计算函数 f 的值）并且比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2-\gamma)$.

如果 $f(x_1) \leqslant f(x_2-\gamma)$（图 26），那么显然，$\bar{x}$ 位于x' 和$x_2-\gamma$ 之间，计算

$$f\left(\frac{x'+(x_2-\gamma)}{2}\right) = f\left(x_1-\frac{\gamma}{2}\right)$$

（这是后面的第 n 步计算函数f的值）.

如果此时

$$f(x_1-\frac{\gamma}{2}) \leqslant f(x_1)$$

（在图 26 中情形 ×），则 x 位于x' 与x_1之间. 设$\bar{x} = \frac{x'+x_1}{2}$. 确定$\bar{x}$的误差不超过由 x' 到x_1的区间长的一半，即$\frac{L}{2u_{n+1}}$.

如果

$$f(x_1-\frac{\gamma}{2}) > f(x_1)$$

（在图 26 中的情形 ∘），则$\bar{x}$位于$x_1-\frac{\gamma}{2}$ 和 $x_2-\gamma$之间. 设$\bar{x} = \frac{1}{2}((x_1-\frac{\gamma}{2})+(x_2-\gamma))$，我们做出的误差不大于

$$\frac{1}{2}\left((x_2-\gamma)-(x_1-\frac{\gamma}{2})\right) = \frac{1}{2}(x_2-x_1-\frac{\gamma}{2}) =$$

$$\frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{\gamma}{4} = \frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}$$

现在设 $f(x_1) > f(x_1 - \gamma)$(图 27),那么 $\bar{x}$ 位于 x_1 和 x'' 之间.

我们计算 $f(x_2)$(随在计算 $f(x_2 - \gamma)$ 值的后面).

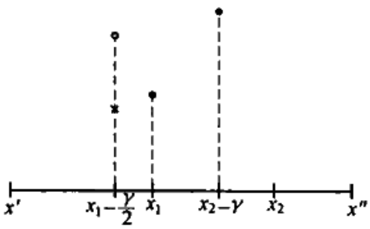


图 26



图 27

如果

$$f(x_2 - \frac{\gamma}{2}) \leqslant f(x_2)$$

(在图 27 中情况 ∘),则 $\bar{x}$ 处于 x_1 与 x_2 之间,选取 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,我们允许的误差只要不达到$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{L}{2u_{n+1}}$ 就可以.

如果,最后一种可能是

$$f(x_2 - \frac{\gamma}{2}) > f(x_2)$$

(在图 27 中情况 ×),则 $\bar{x}$ 位于 $x_2 - \gamma$ 和 x'' 之间.设 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x'' + (x_2 - \gamma))$,我们做出的误差不超过

$$\frac{1}{2}(x'' - (x_2 - \gamma)) = \frac{1}{2}(\frac{L}{u_{n+1}} + \gamma) = \frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$$

在最恶劣的情况下,当 $\gamma > 0$ 时,误差因此可以达到$\frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$;而当 $\gamma < 0$ 时,可以达到$\frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}$.然而,因为数 γ 处于我们的控制之中,可以做出误差任意地接近$\frac{L}{2u_{n+1}}$.

我们仍然确信,误差$\frac{L}{2u_{n+1}}$ 不能再减少了.

其实,对描述方案前 $n-2$ 步的任何偏离是可能发生的,正如由第 12 款的定理中所见到的,仅对区间长增加,而在它上面最小值点的位置取决于后面的

计算，因而最大误差明显地增加．剩下运算最优性的检验，是在最后两步完成的．

首先，对描述运算的偏差可以由于选取的 $\bar{x}$ 不是区间的中点而知晓，这个点的放置的地方，实际上是另外的点．显然，由此引起的可能的误差仍然等于大半个区间，也就是增加的．因此，应当选取线段的中点才是．

其次，我们可能选取 f 最后确定的点不靠近点 x_1（或者不靠近 x_2）．但这时可能的误差与这些点间的距离按比例地增加．

最后，这样的情况最终发生了，对 f 确定的倒数第二个点的选取远离 x_2（相应的远离 x_1）．

于是，由描述方案的任一个偏差不能引起可能的误差本身减少到比 $\frac{L}{2u_{n+1}}$ 小的数．这就证明了，我们解决了问题 B．

在第 4 款问题 B 中所列举的其余的问题，就留给读者自己做简要的回答吧！

14．在前一款中探求方案自身的描述伴随着问题提出的精确性，简述了同最优概念的联系以及具体方案最优性的证明．所有这些后退到直接描述是对任何数学讨论中不可分离的成分．它的目的不仅在于提示怎样的过程，而且是我们感兴趣的这个过程的证明．同时在许多情况下实际上是对运算如何精确的描述，而这些运算的任何引证变为完全不重要的．有这样的时候，例如，当问题解完以后在心目中是这个解的实际实现，在这种情况下为了实现问题的解，实际上必定要安排与其说是解的真实性的数学证明，不如说是清楚的界限，按照这个界限在生活中不允许产生歪论．

在问题 A 的条件下，搜索函数 f 在由 x' 到 x'' 的区间上的最小值点 $\bar{x}$ 更精确的方案，在叙述中刚刚描述，这样说的“实际”目的是提醒方案的结构是按照植物学发展型式定义的．（注意，植物学的定义也是搜索的！）它采用下面的形式（如果在一点最后没有指出变到怎样的点时，那就必须变到下一点）．

（1）比较 1 和 n：

① 如果 $n = 1$，则变到（2）；

② 如果 $n > 1$，则变到（4）．

（2）计算 $\bar{x} = \frac{x' + x''}{2}$．

（3）计算 $f(\bar{x})$．在此，过程结束．

（4）计算 $x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x')$ 和 $x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x')$．

（5）计算 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$．

（6）比较 2 和 n：

① 如果 $n=2$,则变到(7);

② 如果 $n>2$,则变到(10).

(7) 比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$:

① 如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则变到(8);

② 如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则变到(9).

(8) 设 $\bar{x}=x_1$,并且过程结束.

(9) 设 $\bar{x}=x_2$,并且过程结束.

(10) 比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$:

① 如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则变到(11);

② 如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则变到(14).

(11) 重新表示

x_2 通过 x'' 表示

x_1 通过 x_2 表示

$n-1$ 通过 n 表示

(12) 计算

$$x_1=x'+\frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')$$

(13) 计算 $f(x_1)$ 且变到(6).

(14) 重新表示

x_1 通过 x' 表示

x_2 通过 x_1 表示

$n-1$ 通过 n 表示

(15) 计算

$$x_2=x'+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')$$

(16) 计算 $f(x_2)$ 并变到(6).

15. 尽管搜索函数 f 最小值的最优方案描述叙述的是绝对精确,没有留下任何没有根据的地方.而在运用到每个具体的函数 f 时,由 x' 到 x'' 的区间和数 n 规定了完全精确的运算序列,它是十分复杂的而且表示起来也是困难的.

因此,为了直观起见,我们再引入一个描述这个方案的某种图式(图 28).

这种类型的图式通常叫做流程图.画出计算过程的流程图,通常是作为在数字电子计算机上实现计算程序的第一阶段.

16. 作为结束,我们引入运用在 14 款、15 款中描述的方案的例子.借助于在由 0 到 1 的区间上的五步计算,求函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ 的最小值点 $\bar{x}$.

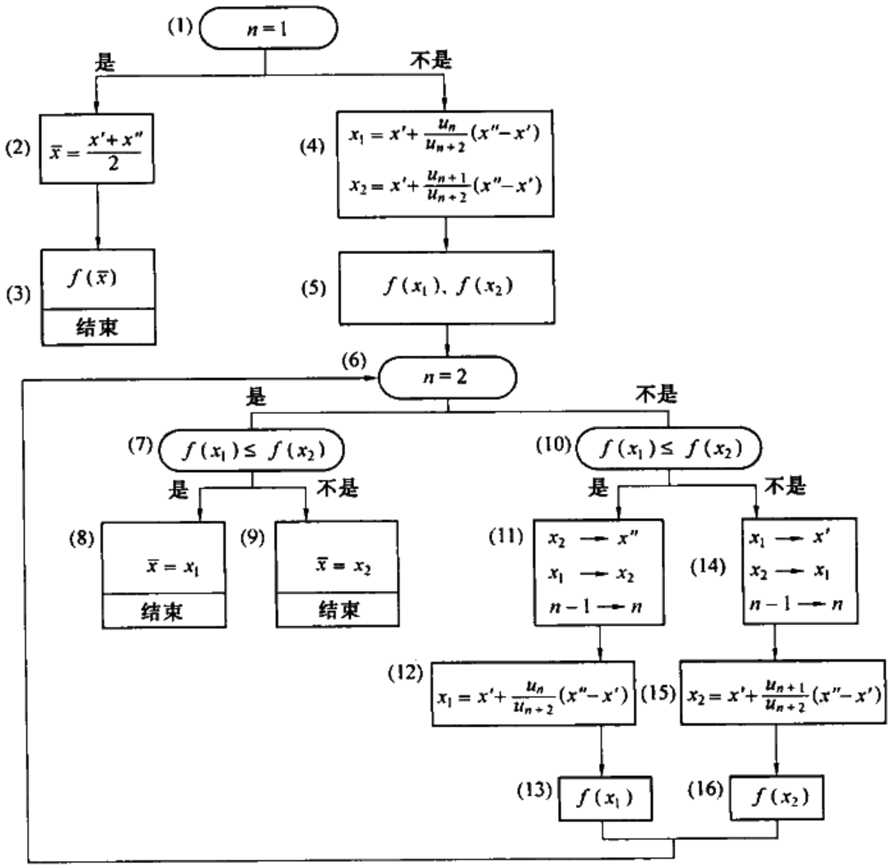


图 28

预先我们作出重要的注释(与第1款比较).

求解析地给出的(即能用公式计算它的值)函数的极小值(或者极大值)点,通常方便进行的不是搜索理论的方法,而是另外的对此更为适用的与微分学有关的方法.所以,我们心目中应该清楚,所引入的例题纯粹带有对搜索理论图解的性质.用微分学可以不难证明,在本例中 $\bar{x}=\sqrt[3]{4}=1.158\ 740\ 11\cdots$.甚至可以求得更加粗略的近似值.然而在这样的情况下,如果关于函数预先不知道什么(除它不能由升变为减以外)或者对它给出的表达式过度的复杂,微分学的方法不再适用了,这时搜索理论将成为有效的全部的工具.

(1) 比较 $n=5$ 和 1,给出 $n\neq 1$;所以变到(4).

(4) 计算

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{5}{13}(2 - 1) = 1.384\ 61$$

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{8}{13}(2 - 1) = 1.615\ 38$$

(5) 计算

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} = f(1.384\ 61) = 0.722\ 22 + 1.176\ 70 = 1.898\ 92$$

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1.615\ 38) = 0.619\ 05 + 1.270\ 98 = 1.890\ 03$$

(6) 比较 $n = 5$ 和 2,给出 $n \neq 2$;所以变到(10).

(10) 比较 $f(x_1) = 1.898\ 92$ 和 $f(x_2) = 1.890\ 03$,给出 $f(x_1) > f(x_2)$;所以变到(14).

(14) 重新表示

$$x_1 \rightarrow x' = 1.384\ 61$$
$$x_2 \rightarrow x_1 = 1.615\ 38$$
$$n = 4$$

(15) 计算

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1.384\ 61 + \frac{5}{8}(2 - 1.384\ 61) = 1.769\ 27$$

(16) 计算

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1.769\ 27) = 0.565\ 22 + 1.330\ 12 = 1.895\ 34$$

且变到(6).

(6) 比较 $n = 4$ 和 2;因为 $n \neq 2$,变到(10).

(10) 比较 $f(x_1) = 1.890\ 03$ 和 $f(x_2) = 1.895\ 34$;因为 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,变到(11).

(11) 重新表示

$$x_2 \rightarrow x'' = 1.769\ 23$$
$$x_1 \rightarrow x_2 = 1.615\ 38$$
$$n = 3$$

(12) 计算

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1.384\ 61 + \frac{2}{5}(1.769\ 23 - 1.384\ 61) = 1.538\ 46$$

(13) 计算

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} - f(1.538\ 46) = 0.650\ 00 + 1.240\ 35 = 1.890\ 35$$

并且变到(6).

(6) 比较 $n = 3$ 和 2;因为 $n \neq 2$,变到(10).

(10) 比较 $f(x_1) = 1.890\,35$ 和 $f(x_2) = 1.890\,03$;因为 $f(x_1) > f(x_2)$,所以变到(14).

(14) 重新表示

$$x_1 \rightarrow x' = 1.538\,46$$
$$x_2 \rightarrow x_1 = 1.615\,38$$
$$n = 2$$

(15) 计算

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1.538\,46 + \frac{2}{3}(1.769\,23 - 1.538\,46) = 1.692\,31$$

(16) 计算

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1.692\,31) = 0.590\,91 + 1.300\,89 = 1.891\,90$$

变到(6).

(6) 比较 n 和 2,给出 $n = 2$;变到(7).

(7) 比较 $f(x_1) = 1.890\,03$ 和 $f(x_2) = 1.891\,70$;$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,所以变到(8).

(8) 假设 $\overline{x} = 1.615\,38$.

根据第 11 款的定理,我们求得 $\overline{x}$ 与真正的最小值点的位置可以相差不超过 $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_7} = \frac{1}{13} = 0.077$. 实际上这个误差更小,它等于 0.028. 我们接受的函数 f 的最小值,即 $f(\overline{x})$ 等于 1.890 03 与 f 的真正的最小值,它等于

$$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 1.889\,88$$

只相差 0.000 15. 这表明,在计算过程中 x 值能用比 f 值更小的精度来确定.

这个结论本身没有任何值得奇怪的. 其实,应当求具有这样精度范围的 x 值,从这个精度范围可以在我们的条件下求得最小值点 $\overline{x}$(我们知道,这个精度等于 $\frac{1}{u_{n+2}}$). 函数 f 的值也应当计算到一定的精度,保障能比较这个函数的一对值,并且由每个这样的对子中选出最小的和最大的值来. 因此,如果实际上不管什么样的 $f(a)$ 和 $f(b)$ 彼此之间差别很大,并且这个差别在粗略地确定 $f(a)$ 和 $f(b)$ 时已经很突出,那么我们能计算这些值具有小的精确度. 反之,如果这些 $f(a)$ 和 $f(b)$ 实际上很接近,则为了说明它们中怎样一个大于另一个所需的计算要带有更大的精度. 因为预先(到实际计算完成) 不知道进行比较的函数值彼此之间的差别有多么大,我们可能"失算" 且计算它们的精度不够,无法给

出决定这些值中哪个大的可能性. 在这种情况下需要重复进行更加精确的计算,耗费在加强这个补充上.

所指出的一切引起进一步涉及计算过程中"精度控制"问题研究的必要性,然而这些问题十分复杂,同本书已经没有直接的联系了.

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书名	出版时间	定价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007－09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007－09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008－01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	2010－01	18.00
数学眼光透视	2008－01	38.00
数学思想领悟	2008－01	38.00
数学应用展观	2008－01	38.00
数学建模导引	2008－01	28.00
数学方法溯源	2008－01	38.00
数学史话览胜	2008－01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007－10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008－01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008－05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
发展空间想象力	2010－01	38.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010－2	98.00
平面几何证明方法全书	2007－08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006－12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007－09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008－09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009－01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009－06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	即将出版	48.00
几何变换与几何证题	2010－01	88.00
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	即将出版	78.00
三角形的五心	2009－06	28.00
俄罗斯平面几何问题集	2009－08	88.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006－05	58.00
历届 CMO 试题集	2008－09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007－03	28.00
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009－03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008－07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010－01	58.00
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008－06	48.00
400 个最新世界著名数学最值问题	2008－09	48.00
500 个世界著名数学征解问题	2009－06	48.00
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010－01	48.00
超越吉米多维奇——数列的极限	2009－11	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009－05	68.00
初等数论难题集(第二卷)(上)	即将出版	48.00
初等数论难题集(第二卷)(下)	即将出版	38.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
精神的圣徒　别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008－09	48.00
数学史概论	2009－06	78.00
斐波那契数列	2010－2	28.00
博弈论精粹	2008－03	58.00
多项式和无理数	2008－01	68.00
模糊数据统计学	2008－03	48.00
解析不等式新论	2009－06	68.00
数学奥林匹克不等式研究	2009－08	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008－09	68.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009－05	118.00
中国初等数学研究　2009卷(第1辑)	2009－05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010－01	58.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009－02	38.00
高考数学的理论与实践	2009－08	38.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00
向量法巧解数学高考题	2009－08	28.00
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010－01	38.00
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010－01	38.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451－86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn